Solutions des exercices (Chapitre 20, Langages géométriques)

1 Calculs vectoriels, barycentres.

1 Soit $\mathbf{d}$ un vecteur directeur de δ (et donc de δ', puisque $\delta//\delta'$) ; on a $\mathbf{d} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \cap \overrightarrow{\mathcal{Q}}$ (où $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$), donc $\mathbf{d} \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}$, et comme $\mathbf{d}$ est directeur de δ', on a de même $\mathbf{d} \in \overrightarrow{\mathcal{R}} \Rightarrow \mathbf{d} \in \overrightarrow{\mathcal{Q}} \cap \overrightarrow{\mathcal{R}}$, ce qui montre que $\overrightarrow{\delta} = \overrightarrow{\delta''}$, c'est-à-dire que $\delta//\delta''$ (on vérifie aisément qu'elles ne peuvent être confondues, car alors on aurait aussi $\delta = \delta'$).

2 On sait que $\overrightarrow{CG_t} = \dfrac{t\overrightarrow{CA} + (t+1)\overrightarrow{CB} - 2t\overrightarrow{CC}}{t + (t+1) + (-2t)} =$ $t\overrightarrow{CA} + (t+1)\overrightarrow{CB} = t\overrightarrow{CA} + (t+1)(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = (t+1)\overrightarrow{AB} - (2t+1)\overrightarrow{AC}$. On voit que $\overrightarrow{CG_t}$ ne peut être colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ (et donc $(CG_t)//(AB)$) que si $t = -1/2$, ce qu'on pouvait aussi obtenir (mais sans rigueur) en remarquant que c'est le seul cas où on ne peut utiliser le barycentre partiel de A et B (qui est alors «rejeté à l'infini»). D'autre part, quand t varie, le point G_t, dans le repère $(C, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, a pour coordonnées $(t, t+1)$, ce qui montre qu'il décrit la droite d'équation cartésienne $[y = x + 1]$, et cette droite passe par B (pour $t = 0$) et par $(-1, 0)$ (pour $t = -1$), c'est-à-dire par le symétrique de A par rapport à C.

3 Le plus facile est d'utiliser K, isobarycentre de A, B, C et D (c'est-à-dire avec des coefficients égaux) : par le théorème de composition, on voit que K doit être milieu des milieux de $[AB]$ et $[CD]$, par exemple, c'est-à-dire milieu de $[MP]$; comme il doit aussi être milieu de $[NQ]$ et de $[RS]$, on voit que le résultat cherché revient à montrer que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, ce qui résulte de ce que, par exemple, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}/2$ (ce dernier résultat se montrant par Thalès dans le triangle ABC, ou directement par calcul vectoriel).

4 Soit Q le barycentre de B et C, avec coefficients respectifs b et c. On a donc $\overrightarrow{GQ} = \dfrac{b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}}{b+c}$, donc $\overrightarrow{0} = a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = a\overrightarrow{GA} + (b+c)\overrightarrow{GQ}$, ce qui montre que A, G et Q sont alignés. Comme Q appartient à la droite (BC), on a donc montré que (BC) et (AG) ne sont pas parallèles, P est donc confondu avec Q et on a $b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$, d'où $b\overline{PB} + c\overline{PC} = 0$, et $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\dfrac{c}{b}$.

5 Supposons d'abord que les trois droites soient concourantes en G. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, le point G a pour coordonnées (x, y), c'est-à-dire que $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$; or cela revient à dire que G est barycentre de A, B et C avec coefficients respectifs $a = 1 - x - y$, $b = x$ et $c = y$. Comme on vient de le voir à l'exercice précédent, cela entraîne que $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\dfrac{c}{b}$, et de même (par une permutation circulaire des lettres) que $\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = -\dfrac{a}{c}$ et que $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -\dfrac{b}{a}$. On a donc

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = (-\frac{c}{b}) \times (-\frac{a}{c}) \times (-\frac{b}{a}) = -1.$$

Réciproquement, si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1,$$

posons $G = (AP) \cap (BQ)$, et écrivons de même G comme barycentre de A, B et C. On en déduit que $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\dfrac{c}{b}$, que $\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = -\dfrac{a}{c}$ et que, appelant S le point $(CG) \cap (AB)$, $\dfrac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = -\dfrac{b}{a}$. Or on a $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \dfrac{-1}{\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}} = -\dfrac{b}{a}$, ce qui montre que S est confondu avec R, et que les trois droites sont concourantes. En réalité, cette dernière analyse n'est correcte que si le point G existe, mais si on avait $(AP)//(BQ)$, on en déduirait aisément (par Thalès) que $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = -1$; la condition de l'énoncé voudrait donc que $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$, donc $A = B$ absurde.

6 É crivons P et Q comme barycentres : si, par exemple $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC}$, P est barycentre de (B, b) et (C, c) si $c/(b+c) = k$; on voit qu'il suffit de choisir $c = k$ et $b = 1-k$, et alors, on aura $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\dfrac{c}{b} = \dfrac{k}{k-1}$; de même, si $\overrightarrow{CQ} = k'\overrightarrow{CA}$, on aura $\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \dfrac{k'}{k'-1}$ (avec $a' = k'$ et $c' = 1-k'$). Le barycentre R de P et Q avec coefficients p et q est, par composition des barycentres, celui de (A, qk'), $(B, p(1-k))$ et $(C, q(1-k')+pk)$; R appartiendra à (AB) si (et seulement si) $q(1-k')+pk = 0$. Ainsi, si P, Q et R sont alignés, on a (comme précédemment) $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -\dfrac{b''}{a''} = -\dfrac{p(1-k)}{qk'} = \dfrac{(1-k)(1-k')}{kk'}$; on en déduit que

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{k}{k-1} \times \frac{k'}{k'-1} \times \frac{(1-k)(1-k')}{kk'} = +1.$$

Réciproquement, si cette égalité est vraie, on montre aisément (comme dans l'exercice précédent) que le point R', intersection de (PQ) et (AB), vérifie $\dfrac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} = \dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \dfrac{k''}{k''-1}$ (où $\overrightarrow{AR} = k''\overrightarrow{AB}$) ; on en déduit que $\overrightarrow{AR'} = k''\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AR}$, donc que R et R' sont confondus, et que P, Q et R sont alignés.

2 Équations de droites et de plans.

7 $[y = b]$ est formé de tous les points de la forme (x, b, z), c'est-à-dire d'un plan parallèle à (Oxz) (et passant par $(0, b, 0)$). Si $[(x-a)^2 + (z-c)^2 = 0]$, c'est que $x = a$ et $z = c$; ces points $((a, y, c))$ appartiennent à une droite parallèle à Oy, et passant par $(a, 0, c)$.

8 On vérifie aisément que l'équation $[x/a + y/b + z/c = 1]$ (à laquelle on peut arriver par calcul de déterminant, par exemple) convient ; son intersection avec la droite $(O, \imath + \jmath + \overrightarrow{k})$ doit être de la forme (k, k, k) ; substituant, on en déduit $k = 1/(1/a + 1/b + 1/c) = abc/(ab + ac + bc)$ si $ab + ac + bc \neq 0$; si $ab + ac + bc$ est nul, c'est que la droite $(O, \imath + \jmath + \overrightarrow{k})$ est parallèle au plan.

9 On sait que, pour t fixé, une représentation paramétrique de D_t est $P_u \in D_t \iff P_t = (1+u, 1-u, t+tu)$. On aura parallélisme si aucun point P_u n'appartient à $\mathcal{P}$, c'est-à-dire si, pour tout u, $(1+u)+2(1-u)+3(t+tu) = (3t-1)u+(3+3t) \neq 1$. Or cela n'est possible que pour $t = 1/3$ (sinon, le point correspondant à $u = \dfrac{3t-2}{1-3t}$ convient); la droite $D_{1/3}$ (et elle seule) est donc parallèle au plan $\mathcal{P}$. Comme on vient de le dire, si $t \neq 1/3$, le point d'intersection est $P_{\frac{3t-2}{1-3t}}$, qui a pour coordonnées $(\dfrac{3}{1-3t}, \dfrac{-1-6t}{1-3t}, \dfrac{3t}{1-3t})$; on reconnaît le barycentre des points $P_0 : (3,-1,0)$ et $Q : (0,2,-1)$ affectés des coefficients 1 et $-3t$, d'où on vérifie facilement que l'ensemble des points d'intersection est la droite (P_0Q), à l'exception du point Q (qui correspondrait à t «infini»). On remarquera que cette droite est l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan $[x+y=2]$, ce qui était peut-être prévisible au vu des équations paramétriques de D_t...

Solutions des exercices (Chapitre 21, Géométrie analytique)

1 On sait (par projection) que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1/2$; posant $\mathbf{v} = (x, y)_{\mathcal{B}}$ et $\mathbf{v}' = (x', y')_{\mathcal{B}}$, où $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, on a $\mathbf{v}.\mathbf{v}' = xx'\overrightarrow{AB}^2 + (xy' + yx')\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + yy'\overrightarrow{AC}^2 = xx' + (xy' + yx')/2 + yy'$; comme $\overrightarrow{BC} = (-1, 1)_{\mathcal{B}}$, on a bien $||\overrightarrow{BC}|| = 1 - 1 + 1 = 1$.

2 Pour que les points $A : (a, 1, 0)$, $B : (a, -1, 0)$ et $C : (1, 0, a)$ forment un triangle équilatéral, il faut qu'on ait $AB = AC = BC$, donc que $4 = (a-1)^2 + a^2 + 1 = (a-1)^2 + a^2 + (-1)^2$ (cette dernière égalité montrant déjà que pour tout a, le triangle ABC est isocèle en C). On obtient donc $a^2 - a - 1 = 0$, de solution (positive) $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or). Par symétrie des calculs, on voit que les triangles de la forme $((0, a, 1), (0, a, -1), (a, 1, 0)$, par exemple, seront aussi équilatéraux. Traçant soigneusement la figure, on obtient 20 triangles identiques, formant un icosaèdre régulier.

3 Remarquons que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}/2$; on a donc

$$\overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})^2 = \overrightarrow{AM}^2 + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}^2,$$
$$\overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC})^2 = \overrightarrow{AM}^2 + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}^2,$$

additionnant, on obtient

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 2AM^2 + 2\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + MB^2 + MC^2 \\ &= 2AM^2 + BC^2/4. \end{aligned}$$

4 Si $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon r, et H le milieu de AB, H est donc le projeté orthogonal de O sur Δ (car $OA = OB$) et $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{HB}$; ainsi, $p = \overline{PA}.\overline{PB} = \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HA}).(\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HB}) = (\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HA}).(\overrightarrow{PH} - \overrightarrow{HA}) = PH^2 - HA^2$; or on a $PH^2 = PO^2 - OH^2$, et $HA^2 = OA^2 - OH^2$; on en déduit que $p = OP^2 - r^2$, qui ne dépend pas de la position de la droite Δ. Si Δ est tangente à $\mathcal{C}$, on aura les points A et B confondus, et alors on a bien encore $p = \overline{PA}.\overline{PB} = PA^2 = OP^2 - r^2$.

5 Commençons par normaliser les équations de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$: divisant par exemple la première par $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (qui n'est évidement pas nul), on obtient une équation de la forme $Ax + By + Cz + D = 0$, avec $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. On sait que, si M a pour coordonnées (x, y, z), $d(M, \mathcal{P}) = \dfrac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$; l'ensemble des points tels que $d(M, \mathcal{P}) = d(M, \mathcal{Q})$ aura donc pour équation $|Ax + By + Cz + D| = |A'x + B'y + C'z + D'|$, c'est-à-dire que $Ax + By + Cz + D = A'x + B'y + C'z + D'$ ou que $Ax + By + Cz + D = -(A'x + B'y + C'z + D')$; ce qui correspond aux équations de deux plans (car, les plans initiaux n'étant pas parallèles, les coefficients $(A \pm A', B \pm B', C \pm C')$ ne sont pas tous nuls). Déterminons leurs vecteurs normaux : on a pour le premier, $\mathbf{n}_1 = (A - A', B - B', C - C')$, et pour le second $\mathbf{n}_2 = (A + A', B + B', C + C')$; on a donc $\mathbf{n}_1.\mathbf{n}_2 = A^2 - A'^2 + B^2 - B'^2 + C^2 - C'^2 = 1 - 1 = 0$, ce qui montre que les deux plans sont orthogonaux; cela s'explique géométriquement, car il s'agit des deux plans bissecteurs (obtenus en prenant dans les plans $\mathcal{R}$, normaux à $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ les bissectrices des droites $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}$ et $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R}$) ...

6 Prenons comme repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OB}, \jmath, \overrightarrow{k})$, où O est le miiieu de AB ; on a donc, pour un point M de coordonnées (x, y, z), $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = x^2 - 1 + y^2 + z^2 = MA.MB.\cos\alpha$, ce qui montre (en élevant au carré) que l'équation cherchée est un sous-ensemble de $\mathcal{T}$, d'équation cartésienne $(x^2 - 1 + y^2 + z^2)^2 = ((x-1)^2 + y^2 + z^2)((x+1)^2 + y^2 + z^2)\cos^2\alpha$; cette équation ne peut pas se factoriser. Dans le plan $(O, \overrightarrow{OB}, \jmath)$ (comme dans tout plan contenant (AB)), cette équation se réduit à $(x^2 - 1 + y^2)^2 - ((x-1)^2 + y^2)((x+1)^2 + y^2)\cos^2\alpha = 0$, qui se factorise en revanche (mais sans l'indication de l'énoncé, seul un logiciel de calcul formel permettait de le découvrir) en :

$$\sin^2\alpha(x^2 + y^2 - \frac{2y}{\tan\alpha} - 1)(x^2 + y^2 + \frac{2y}{\tan\alpha} - 1) = 0;$$

on reconnait les équations de deux cercles (passant par A et B, et de centres $(0, \pm 1/\tan\alpha)$), et l'ensemble initial $\mathcal{T}$ est donc la figure obtenue par rotation de ces cercles autour de l'axe AB (qu'on appelle encore un tore). Mais comme on a élevé au carré, on voit qu'en fait ces deux cercles correspondent aux deux angles α et $\pi - \alpha$; seule une analyse soignée montrerait que le cas α correspond à deux arcs de cercles (symétriques par rapport à (AB)). L'étude faite en classe des relations entre angle inscrit et angle au centre permet de comprendre pourquoi ces deux arcs conviennent, mais il est un peu plus difficile de montrer qu'aucun autre point ne convient.

7 On peut utiliser la formule du cours ($d(M, \Delta) = \dfrac{||\overrightarrow{AM} \wedge \mathbf{d}||}{||\mathbf{d}||}$, où A est un point de Δ, et $\mathbf{d}$ un vecteur directeur de Δ ; mais on peut aussi remarquer que le point général P de Δ a pour coordonnées $(0, at, bt)$, et rechercher le minimum de $PM^2 = x^2 + (y-a)^2 + (z-bt)^2$. La première méthode donne ici $d(M, \Delta) = \sqrt{\dfrac{(by - az)^2 + (a^2 + b^2)x^2}{a^2 + b^2}}$; on en déduit qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $z^2 = \dfrac{(by - az)^2 + (a^2 + b^2)x^2}{a^2 + b^2}$. Or, si $P(x, y, z) \in \mathcal{C}$, on voit aisément que Q, de coordonnées (tx, ty, tz) appartient également à $\mathcal{C}$, l'équation précédente étant «homogène». Ce résultat montre que toute la droite OP est contenue dans $\mathcal{C}$, qui est donc un cône de sommet O. Géométriquement, si H et K sont les projections respectives de P sur Δ et sur le plan $\mathcal{P}$, et H' et K' les projections de Q (situé sur la droite OP), on aura $(PK)//(QK')$ (puisque normales au même plan) et $(PH)//(QH')$ (puisque normales à Δ, et contenues dans le plan $((OP), \Delta)$) ; utilisant Thalès, on voit que $PH/PK = QH'/QK'$, ce qui montre que Q appartient à C, ainsi que tous les points de (OP).

8 On sait que $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ est orthogonal à $\mathbf{a}$ et à $\mathbf{b}$. Ainsi, $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ sera orthogonal à $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$, donc appartenant au plan $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ (ou nul) ; ceci montre déjà qu'on peut écrire $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$. Plaçons-nous alors dans une base orthonormée directe $(\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ (en supposant pour simplifier $\mathbf{v}$ unitaire, ce qui est toujours possible par changement d'unité...), telle que $\mathbf{x}$ appartienne au plan $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. On aura donc $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, d'où $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$, puis $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) =$

$\begin{pmatrix} by \\ -ay \\ 0 \end{pmatrix}$. Or $\mathbf{u}.\mathbf{v} = a$ et $\mathbf{u}.\mathbf{w} = ax + by$; on peut donc bien écrire

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} by \\ -ay \\ 0 \end{pmatrix} = (ax+by) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{u}.\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u}.\mathbf{v})\mathbf{w};$$

et ce résultat ne dépend évidemment pas du repère choisi.

9 Montrons d'abord que si $(x, y, z) = \mathbf{v}_0$ correspondant à $t = 0$ appartient à l'intersection, il en est de même de tous les $\mathbf{v}_t$. En effet, on a $\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_0 = t\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}'$, qui est orthogonal à $\mathbf{n}$ et à $\mathbf{n}'$, donc appartient aux plans vectoriels $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{Q}$; ce vecteur est donc bien un vecteur directeur de la droite $P \cap Q$. Il suffit, par conséquent, de montrer que $\mathbf{v}_0 = \dfrac{(d'\,\mathbf{n} - d\,\mathbf{n}') \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}')}{||\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}'||^2}$ représente bien un point de $P \cap Q$; par symétrie des rôles de P et Q (et compte tenu de ce que $\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}' = -\mathbf{n}' \wedge \mathbf{n}$), il suffit même de vérifier que $\mathbf{v}_0$ représente un point de P. Or, par définition de P, il suffit pour cela de montrer que $\mathbf{v}_0.\mathbf{n} = -d$, et comme on sait que $\mathbf{u}.(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, on voit qu'il ne nous reste plus qu'à montrer que, posant $D = \det(d'\mathbf{n} - d\mathbf{n}', \mathbf{n}, \mathbf{n} \wedge \mathbf{n}') = -d \det(\mathbf{n}', \mathbf{n}, \mathbf{n} \wedge \mathbf{n}')$ (par linéarité du déterminant), on a $D = -d||\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}'||^2$; et ce dernier résultat est évident, puisque $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \det(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}).(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$.

1 Si C est le point fixe de f, on a $f(g(C)) = g(f(C)) = g(C)$, ce qui montre que $g(C)$ est aussi point fixe de f. Comme on a supposé C unique, on a donc $g(C) = C$, donc C point fixe de g ; f et g jouant le même rôle, C sera l'unique point fixe de g. Si C n'est pas unique, la conclusion ne tient plus (car on sait seulement que $g(C)$ est un autre point fixe de f) ; ainsi, si f est la symétrie d'axe Oy ($(x, y) \mapsto (-x, y)$) et g la translation de vecteur $(0, 1)$ ($(x, y) \mapsto (x, y+1)$), on a $f(g(x, y)) = f(x, y+1) = (-x, y+1)$, et $g(f(x, y)) = g(-x, y) = (-x, y+1)$, ce qui prouve que f et g commutent, et pourtant f a pour points fixes tous les points de l'axe Oy, tandis que g n'a aucun point fixe.

2 Plaçons-nous dans un repère de centre O, dont l'axe Ox contient le centre de $\mathcal{C}$ (qui a donc pour équation dans ce repère $(x-a)^2 + y^2 = r^2$). La transformation f envoie $M(x, y)$ (avec $x^2 + y^2 \neq 0$) sur $N(x', y')$ tel que $x'/x = y'/y > 0$ et $(x^2+y^2)(x'^2+y'^2) = 1$; on en déduit que $x' = x/(x^2+y^2)$ et que $y' = y/(x^2+y^2)$, ce qui entraîne (en remarquant que $f = f^{-1}$, et donc que $x = x'/(x'^2 + y'^2)$ et $y = y'/(x'^2 + y'^2)$) que l'équation de $f(\mathcal{C})$ est $(x' - a(x'^2 + y'^2))^2 + y'^2 = (r(x'^2+y'^2))^2$; développant et simplifiant (en posant par exemple $s = x'^2+y'^2$), on trouve $s - 2ax's + a^2s^2 = r^2s^2$, donc $1 - 2ax' + s(a^2 - r^2) = 0$. Si $a^2 \neq r^2$ (c'est-à-dire si $O \notin \mathcal{C}$), on reconnaît l'équation d'un cercle, de centre $(a/(a^2-r^2), 0)$ et de rayon $r/|a^2-r^2|$; si $a^2 = r^2$, on obtient simplement l'équation d'une droite parallèle à Oy. Ces résultats ne dépendant pas du choix du repère, on obtient en définitive que l'image par f d'un cercle de centre A, ne passant pas par O, est un autre cercle, de centre B, avec O, A et B alignés ; et que si le cercle passe par O, son image est une droite perpendiculaire à (OA).

3 Supposons le problème résolu, et considérons r, rotation de centre A et d'angle $\alpha = \pm\pi/3$. On aura donc $r(B) = C$, $r(D_1) = D'_1$, et donc $C \in D_2 \cap D'_1$. Réciproquement, partant du point $I = D_2 \cap D'_1$, on voit aisément que le triangle $(A, r^{-1}(I), I)$ convient (en effet, $B = r^{-1}(I)$ appartient à $r^{-1}(D'_1) = D_1$). Il reste à analyser les différentes solutions produites par cette construction : elles sont distinctes, car on a $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \alpha$. On voit, plus généralement, que si $\widehat{D_1, D_2} = \pm\pi/3$, la solution correspondante disparait (si $D'_1 // D_2$), ou que tout point de D_2 convient (si $D'_1 = D_2$).

4 Remarquons d'abord que $\overrightarrow{h}$ est l'homothétie vectorielle de rapport k ($\overrightarrow{h} : \mathbf{v} \mapsto k\mathbf{v}$) ; $\overrightarrow{h} = k.\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$ commute donc avec $\overrightarrow{r}$, et $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{r}$. Ainsi, f est une rotation d'angle α ; il suffit donc pour la caractériser de déterminer son centre, c'est-à-dire le point C tel que $f(C) = C$. Remarquons qu'en posant $C' = h(C)$ et $C'' = r(C')$, on a $h^{-1}(C'') = C$, donc $C'' = C'$, ce qui montre que $C' = B$, le centre de r. Ainsi, C est l'image de B par l'homothétie h^{-1}, de centre A et de rapport $1/k$.

5 On sait que f est une transformation affine, d'endomorphisme associé $\overrightarrow{f}$, avec $\overrightarrow{f}((x, y, z)) = (y, z, x)$, dont la matrice est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie aisément que ${}^tM = M^{-1}$, et que $\det M = 1$; $\overrightarrow{f}$ est donc une rotation vectorielle, et f est un déplacement. Cherchons les points fixes de f : le système $\begin{cases} x = y + a \\ y = z + b \\ z = x + c \end{cases}$ admet pour solution $\{(t, t-a, t-a-b)\}_{t\in\mathbf{R}}$ si $a+b+c=0$, et n'a pas de solution sinon. On en déduit que, si $a+b+c=0$, f est une rotation d'axe Δ (passant par $(0,-a,c)$ et de vecteur directeur $\mathbf{d}=(1,1,1)$); cherchons α, l'angle de cette rotation : prenant un vecteur orthogonal à $(1,1,1)$, par exemple $\mathbf{u}=(1,-1,0)$, son image par $\overrightarrow{f}$ est $\mathbf{v}=(-1,0,1)$; comme $\mathbf{u}.\mathbf{v}=-1$ et que $\|\mathbf{u}\|=\|\mathbf{v}\|=\sqrt{2}$, on voit que $\cos\alpha=-1/2$, et donc que l'angle de la rotation est $2\pi/3$ (en valeur absolue); comme $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}=(-1,-1,-1)$, on obtient en définitive la rotation d'axe Δ et d'angle $-2\pi/3$. Si $a+b+c\neq 0$, f est un déplacement sans point fixe; composant f avec la translation de vecteur $-\overrightarrow{Af(A)}$, on obtient une rotation, ce qui montre que f est composée d'une rotation et d'une translation; f s'appelle un vissage.

6 Supposons que $s(D)=D'$, où s est la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$. Si $\mathcal{P}$ coupe D en I, on aura $s(I)=I\in D'$, absurde puisque D et D' sont supposées non coplanaires. Sinon, c'est que D est parallèle à $\mathcal{P}$, mais alors, D' sera parallèle à D, ce qui est également absurde. Plus simplement encore, si s est une symétrie centrale, $\overrightarrow{s}$ est l'endomorphisme $\mathbf{v}\mapsto-\mathbf{v}$, et donc $\mathbf{d}$, vecteur directeur de D, sera transformé en $-\mathbf{d}$, qui sera donc vecteur directeur de D', ce qui montre que D et D' seraient parallèles. É tudions à présent le cas où s est la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ (c'est-à-dire la rotation d'axe Δ et d'angle π). Dans le plan vectoriel $(\overrightarrow{D},\overrightarrow{\Delta})$, $\overrightarrow{s}$ est une symétrie orthogonale (et donc $\overrightarrow{\Delta}$ est bissectrice de $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D'}$), ce qui montre que $\mathbf{d}+s(\mathbf{d})\in\overrightarrow{\Delta}$. Comme $s(\mathbf{d})$ est unitaire, c'est donc que $s(\mathbf{d})=\pm\mathbf{d}'$; et en définitive, que Δ a pour vecteur directeur $\mathbf{d}+\mathbf{d}'$ ou $\mathbf{d}-\mathbf{d}'$. Soit H et H' les pieds de $D_0=(HH')$, la perpendiculaire commune à D et D'. On a $s(D_0)=D_1$, et comme s conserve l'orthogonalité, et que $s(D')=D$, on voit que D_1 est orthogonale à D et D', et donc parallèle à D_0. De plus, $s(H)\in D'$, et $s(K)\in D$, donc $D_1=(s(H)s(K))$ rencontre D et D'. Ainsi, $D_1=D_0$, et $s(H)=K$, ce qui prouve que Δ appartient au plan médiateur de $[HK]$. Finalement, on voit qu'il ne reste que deux axes de symétrie possibles, les droites passant par le milieu de $[HK]$ et ayant pour directions $\mathbf{d}+\mathbf{d}'$ ou $\mathbf{d}-\mathbf{d}'$; il est aisé de vérifier que les symétries par rapport à ces droites conviennent (en remarquant qu'on a alors $s(H)=K$, et $\overrightarrow{s}(\mathbf{d})=\pm\mathbf{d}'$).

7 On sait que si un déplacement admet trois points fixes non alignés, c'est l'identité; ainsi, une rotation (non triviale) ne peut avoir au maximum que deux sommets du cube comme points fixes. De plus, la conservation des distances fait que si M et N sont deux sommets adjacents du cube, il en sera encore de même de $f(M)$ et $f(N)$; enfin, il est clair que O, le centre du cube, doit appartenir à l'axe de rotation. Remarquons également que si f et g sont deux rotations distinctes, il n'existe au plus que deux sommets M et N du cube tels que $f(M)=g(M)$ et $f(N)=g(N)$ (sinon, $f^{-1}\circ g$ serait une rotation non triviale laissant trois sommets du cube invariants, ce qui est absurde). Déterminons d'abord les rotations laissant un sommet fixe : si S est ce sommet, l'axe $(\overrightarrow{OS})$ est l'axe de rotation, on vérifie aisément que, réciproquement, les rotations d'axe $(\overrightarrow{OS})$ et d'angle $\pm 2\pi/3$ laissent le cube invariant (on pourra, par exemple, utiliser les formules obtenues à l'exercice **5**), et il est facile de voir (par projection sur un plan orthogonal à l'axe, par exemple) qu'aucun autre angle ne convient. Or, si S' est le sommet opposé à S (le symétrique de S par rapport à O), on a $\mathrm{Rot}((\overrightarrow{OS}),2\pi/3)=\mathrm{Rot}((\overrightarrow{OS'}),-2\pi/3)$, puisque $\overrightarrow{OS'}=-\overrightarrow{OS}$; on en déduit qu'il existe exactement 8 rotations de ce type. Supposons à présent qu'aucun sommet ne soit fixe; soit P un point de l'axe de rotation situé sur le cube. Si P appartient à une arête $[SS']$, P appartiendra encore à $[f(S)f(S')]$, ce qui montre que $f(S) = S'$ et $f(S') = S$. Cela n'est possible que si P est le milieu de $[SS']$, et si f est une rotation d'angle π (une symétrie orthogonale par rapport à (OP)); inversement, il est clair qu'une telle symétrie convient. Or le cube a 12 arêtes; on en déduit qu'il existe exactement 6 rotations de ce type. Si enfin P n'appartient pas à une arête, un raisonnement analogue montre qu'il doit être au centre d'une face $SS'TT'$; la restriction de f à cette face est donc une rotation laissant le carré $(SS'TT')$ invariant, et il existe exactement 3 rotations ayant cette propriété (celles de centre P, et d'angles $\pi/2$, π ou $3\pi/2$). Comme la face opposée est invariante dans la même rotation, on en déduit qu'il y a 9 rotations de ce type, puisqu'il y a trois couples de faces opposées. Au total, il y a donc finalement 23 rotations non triviales laissant le cube invariant.