Vecteurs de $\mathbf{R}^n$

1 Cette famille est libre, car (méthode du rang) les deux premiers vecteurs ne sont pas colinéaires, et il n'est pas possible d'exprimer le troisième comme combinaison linéaire des deux premiers, les dernières coordonnées n'étant pas nulles. On peut vérifier en écrivant le système approprié ($V = xv_1 + yv_2 + zv_3$) qu'elle n'est pas génératrice, ou remarquer que si elle l'était, ce serait une base, en contradiction avec le théorème de la dimension.

2 En écrivant le système correspondant ($a\mathbf{v}_1+b\mathbf{v}_2+c\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$), on aboutit à $ax+c = 0$, $a + b(1 - x) + c = 0$ et $b + cx = 0$, ce qui n'est possible, si $a \neq 0$, que si $(x - 1)(1 + x^2) = 0$. On en déduit que la famille est libre si $x \neq 1$, liée si $x = 1$.

3 On remarque d'abord que toute base de $\mathbf{R}^4$ étant formée de 4 vecteurs, il faut déterminer les vecteurs qu'on peut retirer. On peut constater ensuite que $\mathbf{v}_5 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4$, ce qui montre qu'une base ne peut contenir ces trois vecteurs ensembles. Un calcul direct montre que la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ est libre, donc base ; on en déduit que la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5)$ engendre $\mathbf{R}^4$, puisqu'on peut construire $\mathbf{v}_4$ avec elle ($\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_5 - \mathbf{v}_2$) ; c'est donc une base, et il en est de même de la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$.

Espaces vectoriels

4 «L'ensemble des fonctions dérivables sur $[0, 1]$, dont la dérivée est nulle en 1/2, est un sous-ensemble non vide des fonctions continues sur $[0, 1]$, stable par addition et multiplication par une constante». Cette affirmation est vraie (car toute fonction dérivable est continue, et $(f + \lambda g)'(1/2) = f'(1/2) + \lambda g'(1/2)$).

5 Le même type de calcul montre que les polynômes de la forme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ de dérivée et de dérivée seconde nulle en 1 forment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$; $P'(1) = 3a + 2b + c = 0$ et $P''(1) = 6a + 2b = 0$ impliquent que $b = -3a$ et que $c = 3a$, autrement dit que les polynômes cherchés sont de la forme $aX^3 - 3aX^2 + 3aX + d$; c'est-à-dire qu'ils sont engendrés par la famille $(X^3 - 3X^2 + 3X; 1)$; cettte famille étant évidemment libre, c'est une base du sous-espace, qui est donc de dimension 2 (un plan vectoriel).

6 Il est clair que la somme de deux polynômes de $\mathbf{C}[X]$, et leur produit par un réel, est encore un polynôme de $\mathbf{C}[X]$; et que ces deux opérations vérifient les propriétés usuelles, et donc les huit axiomes. Les polynômes de degré ≤ 3 (de la forme $aX^3 + bX^2+cX+d$, où $(a, b, c, d) \in \mathbf{C}^4$) forment un sous-espace ; on voit aisément que ce sous-espace est engendré par la famille $(1, i, X, iX, X^2, iX^2, X^3, iX^3)$, et cette famille est libre car les combinaisons à coefficients réels ne peuvent éliminer les parties imaginaires que si ces coefficients sont nuls ; on en déduit que $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}_3[X]) = 8$

7 Posant $\mathbf{v}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{v}_i$ et $a_{n+1} = -1$, on a $\sum_{i=1}^{n+1} a_i\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$; a_{n+1} n'étant pas nul, on voit que $\mathcal{G}$ est liée.

8 Supposons qu'on ait $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{a_i x} = 0$ (pour tout x) ; soit a_k le plus grand des a_i pour lequel $\alpha_i \neq 0$; la fonction f serait alors équivalente (en $+\infty$) à $\alpha_k e^{a_k x}$, ce qui est absurde ; les α_i doivent donc tous être nuls, et la famille est donc libre.

9 Soit $Q(X) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i(X)$ une combinaison linéaire de $\mathcal{F}$; par définition des P_i, on a (pour tout k) $Q(x_k) = \alpha_k P_k(x_k)$; si $Q(X)$ est le polynôme nul, on doit donc avoir ($P_k(x_k)$ n'étant pas nul) $\alpha_k = 0$, ce qui montre que la famille $\mathcal{F}$ est libre. Soit $P_k(X) = \prod_{i \neq k} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$; les x_i étant tous distincts, ce polynôme est bien défini, de degré $n-1$, et tel que $P(x_i) = 0$ si $i \neq k$; enfin $P_k(x_k) = 1$. Le résultat précédent montre donc que la famille des P_k est libre; comme elle est formée de n vecteurs, et qu'on sait que $\dim(\mathbf{R}_p[X]) = p + 1$, on voit que c'est une base de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.

10 Soit $\mathcal{F}$ une base de S, $\mathcal{F}'$ une base de S'; d'après le théorème de la base incomplète (dans S'), il existe une base $\mathcal{B}$ de S' telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$, ce qui montre que $\mathcal{B}$ contient plus de vecteurs que $\mathcal{F}$, et donc que $\dim(S) \leq \dim(S')$. La réciproque est fausse (prendre par exemple une droite et un plan (vectoriels) de $\mathbf{R}^3$).

11 Les vecteurs de la forme $(a, a+b, b+c, a)$ peuvent s'écrire $a(1,1,0,1)+b(0,1,1,0)+c(0,0,1,0)$ on vérifie aisément que cette famille est libre, et donc que le sous-espace cherché est de dimension 3

12 Les trois vecteurs $(1,0,0,1)$, $(0,1,0,2)$ et $(0,0,1,-3)$ vérifient la condition qui caractérise le sous-espace; la famille correspondante est libre, comme on le voit aisément. Le sous-espace des vecteurs vérifiant la condition n'est pas $\mathbf{R}^4$, puisque $(1,0,0,0)$ n'en fait pas partie; sa dimension est donc au plus 3; on en conclue qu'elle vaut 3, et que la famille donnée plus haut est une base.

13 Le rang est 3 si $x \neq 0$ et $x \neq 1$; il vaut 2 sinon.

14 Non : il est formé des polynômes de la forme $(X-1)(X-2)Q(X)$; on vérifiera que la famille des polynômes $(X^k(X-1)(X-2))_{0 \leq k \leq n}$ est libre pour tout n.

15 $\mathcal{F}_1$ est de rang 3 (famille libre, utiliser par exemple $f(0)$, $f'(0)$ et $\lim_{-\infty} f$); $\mathcal{F}_2$ est de rang 2, car il est clair que les deux derniers vecteurs ne sont pas proportionnels, et on a la combinaison linéaire $\cos 2x - 2\cos^2 x + 1 = 0$.

16 Si $P_1 \neq P_2$, on a $\dim(P_1 + P_2) > 2$, et donc $\dim(P_1 + P_2) = 3$; on déduit alors de la formule de la dimension que $\dim(P_1 \cap P_2) = 1$, c'est-à-dire que $P_1 \cap P_2$ est une droite vectorielle.

17 Si $\mathbf{v}$ n'appartient pas à un hyperplan de $\mathbf{R}^n$, la formule de la dimension nous montre que $\mathcal{V}ect(\mathbf{v})$ et cet hyperplan sont supplémentaires; en effet, l'espace engendré par $\mathcal{E}$ et $\mathbf{v}$ étant de dimension supérieure à $\mathcal{E}$ est nécessairement $\mathbf{R}^n$ tout entier.

18 Il faut contrôler que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des sous-espaces (voir les exercices précédents), et que tout polynôme peut s'écrire (de manière unique) $P(X) = Q(X) + aX + b$ avec $Q(X) \in \mathcal{E}$; P étant fixé, on vérifiera que $a = P'(1)$, $b = P(1) - P'(1)$ et $Q(X) = P(X) - aX - b$ conviennent.

Solutions des exercices du chapitre 16 (structures algébriques)

1 a) Non ($1-2 \notin \mathbf{N}$). b) Non ($(1,0) \notin D_f$, où $f : (x,y) \mapsto x/y$). c) Oui (car $(x,y) \in \mathbf{R}^{*2} \Rightarrow x/y \neq 0$).

2 Par associativité, on a $y * x' = (e * x) * x' = e * (x * x') = e * e = e = x * x'$, donc $x * (x' * (x')') = y * (x' * (x')') = x * e = y * e$; ainsi, $x = y = e * x$, ce qui montre que e est élément neutre; de même, $x * x' = e$, donc $(x' * x) * x' = x' * (x * x') = x'$; d'où $(x' * x) * (x' * (x')') = x' * x = x' * (x')' = e$, ce qui montre que x' est élément symétrique de x à gauche, donc élément symétrique. $(G, *)$ est donc bien un groupe.

3 Si x est inversible, comme $x\star(1_A - x) = 0_A$, on aura $x^{-1}\star x\star(1_A - x) = 0_A$, donc $x = 1_A$. Calculons $a = (x + x)\star(x + x)$: d'après la propriété générale, $a = x + x$; par distributivité, $a = x\star x + x\star x + x\star x + x\star x = x + x + x + x$; la régularité de l'addition montre que $x + x = x + x + x + x \Rightarrow x + x = 0_A$. De même, on voit que $x + y = (x + y)\star(x + y) = x + x\star y + y\star x + y$, et donc $x\star y + y\star x = 0_A = x\star y + x\star y$, d'où $x\star y = y\star x$, et A est donc commutatif.

4 Appliquant les régles, on a $a\star x + b = 0 \iff a\star x + b + (-b) = -b \iff a^{-1}\star a\star x = a^{-1}\star(-b)$, et finalement $x = -a^{-1}\star b$

5 $(\mathbf{Z}, +)$ étant un groupe abélien, il suffit de montrer la stabilité de D, c'est-à-dire de montrer que si $y_1 = 5x_1$ et $y_2 = 5x_2$ (avec x_1 et x_2 appartenant à $\mathbf{Z}$), il existe $X \in \mathbf{Z}$ tel que $y_1 - y_2 = 5X$, ce qui est évident en prenant $X = x_1 - x_2$. La stabilité pour la multiplication est également assurée, mais en revanche, $1 \notin D$ (puisque $1/5 \notin \mathbf{Z}$), et l'exigence que tout anneau soit unitaire fait que D n'est pas un anneau.

6 Les remarques finales de l'exercice-type n° 29 donnent l'essentiel des indications nécessaires pour résoudre cet exercice; il est cependant nécessaire de connaître un peu de trigonométrie hyperbolique, et de savoir que $\mathrm{sh}(\ln(x + \sqrt{x^2+1})) = x\ldots$

7 Si $x > 0$ et $y > 0$, on a $x\star y = x^{\ln y} = e^{\ln x \ln y} > 0$, ce qui montre que $\star$ est une loi interne et commutative; comme $x\star(y\star z) = e^{\ln x \ln(y\star z)} = e^{\ln x(\ln y \ln z)} = e^{(\ln x \ln y)\ln z} = e^{\ln(x\star y)\ln z} = (x\star y)\star z$, $\star$ est également associative. L'application $f : x \mapsto e^x$ est une bijection entre $\mathbf{R}$ et $I =]0, +\infty[$; comme $f(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y)$, et que $f(xy) = e^{xy} = e^{\ln(e^x)\ln(e^y)} = e^x\star e^y = f(x)\star f(y)$, f est un isomorphimse entre $(\mathbf{R}, +, \times)$ et $(I, \times, \star)$; ces deux ensembles ont donc la même structure, ce qui explique l'associativité de la loi $\star$, par exemple; plus généralement, cela prouve que $(I, \times, \star)$ est un corps commutatif. Ainsi, l'élément unité de I sera $f(1) = e$; de même, tout élément x de I différent de 1 admet un inverse (tel que $x\star x' = e$), on aura en effet, posant $y = f^{-1}(x)$, $y \times 1/y = 1$, donc $f(y)\star f(1/y) = f(1) = e$, et finalement $x' = f(1/f^{-1}(x)) = e^{1/\ln x}$.

Solutions des exercices (Chapitre 17, Matrices)

1 On sait que $({}^tA)^n = {}^t(A^n)$; si A est symétrique, on a donc $A = {}^tA$ et $A^n = {}^t(A^n)$, ce qui montre que A^n est symétrique. De même, si ${}^tA = -A$, on aura ${}^t(A^n) = (-1)^n A^n$, ce qui montre que A^n est antisymétrique pour n impair (et symétrique si n pair).

2 En utilisant $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$, et en remarquant que $b_{kj} = 0$ si $k \neq j$ et $b_{jj} = 1$, on aboutit à $c_{ij} = a_{ij}$; on aura donc $AI_m = A$ (et de même $I_nA = A$). Pour que AX soit une matrice unité, AX doit être carrée, et donc X doit être une matrice $m \times n$ (et alors $AX = I_n$). A n'est pas forcément inversible dans ce cas : on a par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)$, mais $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si YA est une matrice unité, on voit aisément que Y doit aussi être une matrice $m \times n$; calculons alors le produit $(YA)X = I_mX = X$; par associativité, il est égal au produit $Y(AX) = YI_n = Y$, et donc $X = Y$. A et X commutent donc si $m = n$ (et seulement dans ce cas), mais on ne pourra démontrer qu'au prochain chapitre qu'il en est en effet ainsi.

3 On peut démontrer par récurrence que

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$$

mais c'est aussi une conséquence de ce que $A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} = (\cos x)I + (\sin x)J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifiant $J^2 = -I$, et de la formule du binôme (I et J commutent); on pourrait utiliser aussi l'existence d'un isomorphisme entre les matrices de la forme $aI + bJ$ et $\mathbf{C}$.

4 S est l'ensemble des matrices de la forme $aI + bJ + cK$ (avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$), c'est donc le sous-espace vectoriel $\langle I, J, K \rangle$; comme on a $JK = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas symétrique, et donc pas dans S, S n'est pas stable pour le produit.

5 Ces matrices (dites *tridiagonales*) sont engendrées par la famille des matrices de la base canonique M_{ij} vérifiant la même condition (c'est-à-dire les matrices telles que $|i - j| \leq 1$); elles forment donc un sous-espace vectoriel de dimension $n + 2(n - 1) = 3n - 2$.

6 Posant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, il faut résoudre le système $a+b = c+d = a+c = b+d = 0$, on voit donc que $A = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. ces matrices ne sont pas inversibles (puisque de rang ≤ 1); c'était prévisible, car si A^{-1} existait, on aurait $A^{-1}(AM) = O = M$, absurde. Posant à présent $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on doit résoudre $a+b+c = d+e+f = g+h+i = a+d+g = b+e+h = c+f+i = 0$. On en déduit que l'ensemble des A forme un sous-espace vectoriel de dimension 4, engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7 Il est clair que cette matrice est de rang 1 au moins et 2 au plus; on aboutit à $\mathrm{rg}(M) = 1$ si $x = 1$ ou -1, et $\mathrm{rg}(M) = 2$ sinon.

8 A est régulière, étant sa propre inverse. Si P est inversible, on a :

$$(PAP^{-1})(PAP^{-1}) = PAAP^{-1} = I,$$

PAP^{-1} est donc aussi involutive (voir le prochain chapitre pour une explication de ce genre de propriété). Si $A = (a_{ij})$ est diagonale, on sait que $A^2 = (b_{ij})$ est diagonale, et que $b_{ii} = a_{ii}^2$, on doit donc avoir $a_{ii} = \pm 1$. Prenant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui vérifie $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on voit que $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ doit être involutive.

Solutions des exercices (Chapitre 18, Applications linéaires)

1 f est linéaire; elle est surjective, car $f(a,0,b)=(a,b)$; ce n'est pas un isomorphisme, car $f(1,-1,1)=(0,0)$.

2 f est un endomorphisme, car $f(M+\lambda N)=A(M+\lambda N)=AM+\lambda AN=f(M)+\lambda f(N)$ et que $f(M)$ est une matrice carrée d'ordre n. Pour que f soit un automorphisme, il suffit qu'elle soit injective (puisqu'on est en dimension finie), et donc que pour tout M, $AM=O \Rightarrow M=O$, c'est-à-dire que A soit régulière, et donc inversible.

3 L'application $f\colon P\mapsto f(P)=P'(0)$ est une forme linéaire de $\mathbf{R}[X]$, puisque $(P+\lambda Q)'(0)=P'(0)+\lambda Q'(0)$. Elle est surjective (par exemple, $f(aX)=a$) et non injective (par exemple, $f(aX+b)=f(aX)$).

4 Plus généralement, si f est une forme non nulle, $a\neq 0\in \mathrm{Im}(f)$, et donc $(\exists \mathbf{v})(f(\mathbf{v})=a)$; on en déduit que (pour tout $b\in K$) $f((b/a)\mathbf{v})=b$, ce qui montre que f est surjective.

5 Soit $\mathbf{u}$ un vecteur quelconque de $\mathcal{E}$, posons $\mathbf{u}_1=(f(\mathbf{u})/f(\mathbf{v})).\mathbf{v}$. On vérifie aisément que $f(\mathbf{u}_1)=f(\mathbf{u})$, et que $\mathbf{u}_1\in\langle\mathbf{v}\rangle$; posant $\mathbf{u}_2=\mathbf{u}-\mathbf{u}_1$, on en déduit que $f(\mathbf{u}_2)=0$ et donc que $\mathbf{u}_2\in \operatorname{Ker} f$. On a donc bien montré que $\mathcal{E}$ est somme des deux sous-espaces; cette somme est directe, car si $k\mathbf{v}\in\operatorname{Ker} f$, c'est que $kf(\mathbf{v})=0$ et donc que $k=0$.

6 Supposons d'abord n impair, dire que $\mathbf{v}=(x_1,x_2\dots,x_n)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$ équivaut à $x_1+x_2=x_2+x_3=\cdots=x_{n-1}+x_n=x_n+x_1=0$; résolvant successivement ces équations en fonction de x_1, on obtient $x_2=-x_1$, $x_3=x_1$ et par récurrence (partielle) $x_n=(-1)^{n-1}x_1=x_1$, donc $x_i=0$ pour tout i. f est donc injective, ce qui montre que $\mathrm{rg}(f)=n$. Si n est pair, la dernière équation est automatiquement vérifiée, c'est-à-dire que $\operatorname{Ker} f=\langle(1,-1,1,\dots,1,-1)\rangle$; d'après la formule du rang, on aura donc $\mathrm{rg}(f)=n-1$.

7 f est linéaire, puisque la dérivation l'est. Si $P\in\operatorname{Ker} f$, c'est que $P=P'$, ce qui prouve que $P=0$ puisqu'on sait que $d^\circ(P')<d^\circ(P)$. Par conséquent, f est injective. Comme on est en dimension infinie, on ne peut pas conclure que F soit bijective; mais la restriction f_n de f à $\mathbf{R}_n[X]$ est encore un endomorphisme, de noyau nul, et par conséquent f_n est un automorphisme (de $\mathbf{R}_n[X]$). Cela veut donc dire que tout polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ possède un antécédent par f_n, et donc par f; $\mathbf{R}[X]$ étant la réunion des $\mathbf{R}_n[X]$, il est donc entièrement atteint par f, qui est un automorphisme de $\mathbf{R}[X]$.

8 Si $h=g^{-1}\circ f\circ g$, on a $h\circ h=g^{-1}\circ(f\circ \mathrm{Id}_E\circ f)\circ g=g^{-1}\circ g=\mathrm{Id}_E$, et donc h est involutif.

9 Plus généralement, on a $(g^{-1}\circ f_1\circ g)\circ(g^{-1}\circ f_2\circ g)=g^{-1}\circ(f_1\circ f_2)\circ g$, d'où, si $h=g^{-1}\circ p\circ g$, avec $p\circ p=p$, $h\circ h=g^{-1}\circ p\circ p\circ g=g^{-1}\circ p\circ g=h$, et h est un projecteur. Le rang de p étant la dimension de $\mathrm{Im}\, p$, et g étant bijective, il suffit de remarquer que $\mathrm{Im}(p\circ g)=\mathrm{Im}\, p$ et que $\dim g^{-1}(S)=\dim S$ pour en déduire que $\mathrm{rg}\, h=\mathrm{rg}\, p$.

10 Si $\lambda\neq 0$, l'application $g=(1/\lambda)f^{n-1}$ vérifie $f\circ g=g\circ f=\mathrm{Id}_E$, et f est donc un automorphisme.

11 On a vu en **2** que f était linéaire, donc ici un endomorphisme; utilisant la base canonique de $\mathcal{E}$, $\mathcal{B} = (M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}) = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots)$, on obtient F matrice de f dans $\mathcal{B}$:

$$F = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix};$$

une analyse soignée de cette matrice, ou l'observation faite en **2** selon laquelle f automorphisme $\iff$ A inversible aboutit à $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} F = 2 \operatorname{rg} A$.

12 La vérification de la linéarité de f est fastidieuse, mais ne pose pas de difficulté spéciale; on vérifie que, dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$, la matrice représentative de f s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

et pour montrer que f est un projecteur, il suffit donc de contrôler que $P^2 = P$.

Solutions des exercices (Chapitre 19, Déterminants)

1 On peut utiliser la méthode du pivot ; il est cependant possible de calculer d'abord (par combinaison de lignes) le déterminant $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -a & -1 & -1 \end{vmatrix}$ (qui vaut $2(a+1)$) ; le système est donc un système de Cramer pour $a \neq 1$ (et pour $a = 1$, il se ramène à $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y-z+t=-1 \\ x-y-z-t=-3, \end{cases}$ de solution $t = 1$, $x = -1$, $y = 1-z$ (donc de solution paramétrique $(x, y, z, t) = \{(-1, b, 1-b, 1)\}_{b\in\mathbf{R}}$). Pour $a \neq 1$; on obtient par combinaison de lignes : $(a-1)(x-y) = 0$ $(L_1 - L_2)$, donc $x = y$; $(a+1)x + (1-a)y = -2$ $(L_1 + L_4)$, donc $x = -1$, et $y = -1$; le système devient donc $\begin{cases} z+t=2a+1 \\ -z+t=2a-3 \\ -z-t=-2a-1, \end{cases}$, donc $z = 2$ et $t = 2a-1$.

2 Le calcul résulte de la formule de développement selon les lignes ; ainsi, par exemple, on a $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{vmatrix}$, et, redéveloppant les deux cofacteurs suivant la deuxième ligne, on obtient finalement

$$a\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = ad(ad-bc) - bc(ad-bc) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2.$$

3 Par combinaison de lignes, on a d'abord

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & x & b & x \\ x & a & x & b \\ b & x & a & x \\ x & b & x & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & b & x \\ x & a & x & b \\ b-a & 0 & a-b & 0 \\ x & b & x & a \end{vmatrix} \quad (L_3 - L_1 \to L_3),$$

puis, développant selon la troisième ligne,

$$\begin{aligned} D_1 &= (b-a)\begin{vmatrix} x & b & x \\ a & x & b \\ b & x & a \end{vmatrix} + (a-b)\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & a & b \\ x & b & a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)\left(\begin{vmatrix} x & b & x \\ a & x & b \\ b & x & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a & x \\ a & x & b \\ b & x & a \end{vmatrix}\right) \\ &\qquad \text{(en échangeant les deux premières colonnes)} \\ &= (b-a)\begin{vmatrix} x & a+b & x \\ a & 2x & b \\ b & 2x & a \end{vmatrix} = -(a-b)^2(4x^2-(a+b)^2) \\ &\qquad \text{(d'après la multilinéarité, puis en développant directement),} \end{aligned}$$

et finalement $D_1 = -(a-b)^2(2x-a-b)(2x+a+b)$.

Le déterminant $D_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$ se calcule aisément à l'aide de la méthode du pivot ; en effet $D_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix}$, en utilisant successivement $L_4 - L_3 \to L_4$, $L_3 - L_2 \to L_3$ et $L_2 - L_1 \to L_1$. Ainsi, $D_2 = a(b-a)(c-b)(d-c)$.

4 Considérons $D(a,b,c,x) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & x & x^2 & x^4 \end{vmatrix}$ comme un polynôme (en x). On a $\deg(D) = 4$ (en développant selon la quatrième ligne, il vient $D = -M_1 + xM_2 - x^2M_3 + x^4M_4$, où les M_i sont les mineurs) ; et il est clair que $D(a) = D(b) = D(c) = 0$; de plus $D(1) = 0$; si a, b ou $c = 1$, $D(x)$ est nul pour tout x, et il en est de même si a, b et c ne sont pas tous distincts. Ainsi, on a d'abord si $a \neq b \neq c \neq 1$, quatre racines distinctes pour D, ce qui montre que $D(x) = M_4(x-1)(x-a)(x-b)(x-c)$, comme M_4 est un déterminant de Vandermonde, on obtient $D(a,b,c,d) = (a-b)(a-c)(b-c)(d-a)(d-b)(d-c)(d-1)$. Sinon, D, on l'a vu, est toujours nul (quel que soit d), et la formule précédente s'applique encore dans ce cas ; elle est donc toujours vraie.

5 Développant selon la première colonne (par exemple), on voit que $D_n = xD_{n-1} - b \det M_{21}$; comme M_{21} est obtenu par suppression de la première colonne et de la deuxième ligne, on voit facilement que $\det M_{21} = cD_{n-2}$. Ainsi, la suite des D_n satisfait à l'équation de récurrence (linéaire à deux termes) $D_{n+2} = xD_{n+1} - bcD_n$, précisée par les premiers termes $D_1 = x$ et $D_2 = \begin{vmatrix} x & c \\ b & x \end{vmatrix} = x^2 - bc$. En particulier, si $x = b + c$, l'équation caractéristique de la récurrence (obtenue en cherchant les suites géométriques qui la satisfont) devient $k^2 = (b+c)k - bc$, et donc $D_n = Ab^n + Bc^n$; on aura de plus $b + c = Ab + Bc$ et $b^2 + bc + c^2 = Ab^2 + Bc^2$, d'où on tire A et B (en fonction de b et c) ; le calcul n'est pas très difficile, mais risque de masquer la simplification que l'on peut deviner, par exemple, en calculant $D_3 = b^3 + b^2c + bc^2 + c^3$; on obtient en définitive

$$D_n = \frac{b^{n+1} - c^{n+1}}{b - c} = b^n + b^{n-1}c + b^{n-2}c^2 + \cdots + bc^{n-1} + c^n.$$

6 Calculons le polynôme caractéristique de A, $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$. On a $P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$, ce qui montre que la matrice est diagonalisable (en effet, il existe un vecteur propre pour chacune des deux valeurs propres 2 et 3, et comme elles sont distinctes, l'ensemble de ces vecteurs propres est une base, dans laquelle l'endomorphisme associé à A (en base canonique) a pour matrice représentative $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$). On sait qu'appelant P la matrice de passage vers cette nouvelle base, on aura $A = PDP^{-1}$, et donc $A^2 - 5A + 6I_2 = P(D^2 - 5D + 6I_2)P^{-1}$. Or il est clair que $D^2 - 5D + 6I_2 = \begin{pmatrix} 2^2 - 5\times 2 + 6 & 0 \\ 0 & 3^2 - 5\times 3 + 6 \end{pmatrix} = O_2$; on a donc $A^2 - 5A + 6I_2 = O_2$, c'est-à-dire que $P(A) = O_2$ (c'est le théorème de Cayley-Hamilton ; on voit que sa démonstration est facile dans le cas diagonalisable).

7 Le polynôme caractéristique de M, $P(\lambda) = \det(M - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 1 - \lambda^3$ (par Sarrus) se factorise (dans $\mathbf{C}$) en $P(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - j)(\lambda - j^2)$. La matrice a donc pour valeurs propres 1, j et j^2, ce qui montre qu'elle est diagonalisable : en effet, soit V_1, V_2 et V_3 trois vecteurs-colonnes (appartenant à $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbf{C})$) propres (donc non nuls), on a donc (V_1, V_2) libre, car $MV_1 = aV_1$ et $MV_2 = bV_2$ avec $b \neq a$ entraîne $V_2 \neq kV_1$; si alors on avait $V_3 = k_1V_1 + k_2V_2$, on aurait aussi (en composant par M) $cV_3 = k_1aV_1 + k_2bV_2$, et par unicité des coordonnées, $k_1a = k_1c$ et $k_2b = k_2c$; a, b et c étant distincts, on en déduirait $k_1 = k_2 = 0$, donc V_3 nul, ce qui est absurde ; la famille (V_1, V_2, V_3) est donc une base, et M est diagonalisable, c'est-à dire que $M = PDP^{-1}$, en posant $P = (V_1V_2V_3)$ (matrice de passage) et avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$.

Soit (x, y, z) un vecteur de $\mathbf{R}^3$ tel que $x+y+z = 0$, on a $f(x, y, z) = (y, z, x)$; f laisse donc invariant le plan vectoriel $\mathcal{P}$ engendré par $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, -1)$. Dans ce plan, aucun vecteur non nul n'est invariant par f (car $(x, y, z) = (y, z, x) \Rightarrow x = y = z$), ce qui montre qu'un éventuel vecteur propre ne peut être associé à la valeur propre 1. Or les valeurs propres de g, la restriction de f à $\mathcal{P}$, sont des valeurs propres de f ; comme la seule réelle est 1, il en résulte qu'il n'y a pas de vecteurs propres (réels) de g dans $\mathcal{P}$, ce qui montre que g n'est pas diagonalisable dans $\mathbf{R}$.

1 ($\star\star\star$) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite vérifiant l'équation de récurrence (linéaire) $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$; on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Montrer qu'on peut écrire $V_{n+1} = AV_n$, où A est une matrice carrée d'ordre 2 ne dépendant pas de n ; diagonaliser A (mettant A sous la forme $A = P^{-1}DP$), et en déduire que $V_n = P^{-1}D^nPV_0$, puis la formule explicite donnant u_n en fonction de n, u_0 et u_1. On remarquera que le polynôme caractéristique de A correspond à l'équation caractéristique associée à la détermination «classique» de cette formule, vue au chapitre 11 ; en réfléchissant à la signification des vecteurs propres dans ce cas, montrer que ce résultat était prévisible.