Solutions des exercices (Chapitre 7, Fonctions numériques, propriétés globales)

1 $|f|$ a pour graphe celui de f «reflété» par l'axe Ox (c'est-à-dire le symétrique des parties du graphe de f «sous» l'axe Ox), $\max(f, g)$ est obtenu en longeant la partie supérieure de f et g (il est difficile de donner une description précise, un croquis suffirait, mais demande la couleur pour être clair). Enfin, $x \mapsto -f(-x)$ a pour graphe le symétrique du graphe de f par rapport à l'origine.

$|f| \leq |g|$ signifie que le graphe de f reste compris dans la «bande» située entre les graphes de g et de $-g$.

2 $f(x)\sin x$ a un graphe oscillant (avec «pseudo-période» 2π) entre les graphes de f et $-f$; $\sin \circ f$ oscille entre -1 et 1 (de plus en plus vite si f «croît plus vite» que x), en s'annulant pour les valeurs successives $f^{-1}(k\pi)$, et en atteignant son maximum 1 pour les valeurs $f^{-1}(\pi/2 + 2k\pi)$ par exemple.

3 $x \mapsto f(E(x))$ est constante par intervalles, il suffit de tracer le «palier horizontal» partant du point $M : (k, f(k))$ (qui appartient au graphe de f et aboutissant en $M' : (k+1, f(k))$ obtenu à partir de M par translation de vecteur $\imath$ (M' n'appartient pas à ce graphe)

4 Si on avait $b \neq f(a)$, le point $(a, f(a))$ serrait distinct de son symétrique $(a, 2b - f(a))$, et on aurait donc 2 points du graphe sur la droite $[X = a]$, c'est-à-dire deux images distinctes pour a, en contradiction avec la notion de fonction.

5 On a vu (méthode de Cardan) que le changement de variable $X = x + b/3a$ «supprime les termes en x^2» (c'est-à-dire que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = aX^3 + c'X + d'$); on en déduit que dans le repère d'origine $A(-b/3a, d')$, le graphe de f a pour équation cartésienne $Y = X^3 + c'X$, et donc que ce graphe admet A pour centre de symétrie.

6 Il faut chercher le centre d'homothétie $C(x, y)$ et le rapport k tel que (pour tout X) on ait (en posant $M : (X, e^X)$ et $M' : (X', Y')$ tel que $\overrightarrow{CM'} = k\overrightarrow{CM}$) $Y' = a^{X'}$; on a $Y' = k(e^X - y) + y$ et $X' = k(X - x) + x$, il faut donc résoudre

$$(\forall X)\ (\star)\ a^{kX+x(1-k)} = ke^X + y(1-k)$$

En passant aux logarithmes, et en étudiant la limite en $+\infty$, on voit déjà qu'on doit avoir $a^k = e$, et donc $k = 1/\ln a$; les limites en $-\infty$ donnent $y = 0$ (si $a \neq e$), et on voit alors aisément qu'il existe une valeur de x convenable (telle que $a^{x(1-k)} = k$, c'est-à-dire $x = \ln k/(1-k)\ln a$); et en substituant, il est clair que l'égalité $(\star)$ est vérifiée pour tout X.

7 S'il y avait une homothétie, elle enverrait les asymptotes de $\operatorname{th} x$ sur celles de $\operatorname{Arc\,tg} x$, ce qui montre déjà que le centre serait sur l'axe Ox, et le rapport $\pi/2$; de plus le point O doit être transformé en un point du graphe de $\operatorname{Arc\,tg}$, ce qui montre qu'il est le centre cherché. Mais alors, pour montrer que les deux graphes ne sont pas semblables, il suffit de vérifier que l'image du point $(1, \operatorname{th} 1)$ n'est pas sur la courbe, c'est-à-dire que $\operatorname{Arc\,tg}(\pi/2) \neq (\pi/2)\operatorname{th} 1$; or la calculatrice donne $\operatorname{Arc\,tg}(\pi/2) \simeq 1,0039$ et $(\pi/2)\operatorname{th} 1 \simeq 1,196$

8 $\lim\limits_{+\infty}(\ln \operatorname{ch} x)/x = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} \ln \operatorname{ch} x - x = -\ln 2$; le graphe de $\ln \operatorname{ch} x$ est donc asymptote (en $+\infty$) à la droite $[Y = X - \ln 2]$, et, la fonction étant paire, à la droite $[Y = -X - \ln 2]$ en $-\infty$.

On voit aisément que $[Y = X]$ est direction asymptotique de $\sqrt{x^2 + \sin x}$ en $+\infty$, et qu'il en est de même de $[Y = -X]$ en $-\infty$. Ces deux droites sont en fait asymptotes, mais le calcul de limite qui le prouve est assez délicat (passer par la quantité conjuguée)

9 On sait que $\lim\limits_{+\infty} f = L \in \mathbf{R}$ ou $\pm\infty$ (prendre la limite des termes de plus haut degré); comme la limite en $+\infty$ de $f \circ \exp$ est la même (puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$), on voit que si $\lim\limits_{+\infty} f \in \mathbf{R}$, $f \circ \exp$ admettra en $+\infty$ l'asymptote horizontale $[Y = L]$; sinon, $f \circ \exp$ est équivalente à $a_k e^{kx}/a'_p e^{px}$, où $k > p$ et les $a_n x^n$ sont les termes des polynômes P et Q tels que $f = P/Q$; on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(e^x)/x = \pm\infty$, et donc une branche parabolique d'axe Oy. En $-\infty$, $\lim f(e^x) = \lim\limits_{X\to 0^+} f(X)$; donc si $0 \in Df$ (ou si f est prolongeable par continuité en 0) $f\circ\exp$ aura une asymptote horizontale $[Y = f(0)]$; sinon on aura une limite infinie, mais en étudiant le dénominateur (qui contient $X = e^x$ en facteur) on voit aisément qu'on aura encore une branche parabolique d'axe Oy. Si $\lim f = L \in \mathbf{R}$, on a $\lim e^f = e^L$ (et donc une asymptote horizontale); il en est de même si $\lim f = -\infty$. Enfin, si $\lim f = +\infty$, on voit aisément que $f > ax$ pour x assez grand (avec $a > 0$), d'où on déduit que $\lim e^f/x = \lim e^{ax}/x = +\infty$, et donc une branche parabolique d'axe Oy.

Solutions des exercices (Chapitre 8, Limites et continuité)

1 On vérifie aisément que si $\varepsilon > 1/2$, $\alpha = 1/2$ convient ; sinon, on peut prendre $\alpha = \varepsilon/2$, et comme alors $|x| \geq 1/2$, on voit que $|x-1| < \alpha \Rightarrow |x-1|/|x| = |(1/x) - 1| < \varepsilon$.

2 Ce serait correct si on savait déjà que les bijections continues sont monotones, car sinon on ne peut pas affirmer que $a < |f(b)| \iff |f^{-1}(a)| < b$.

3 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1/x\sqrt{x} - 1/x)/x^{3/2} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1} = m/n$ (en utilisant la formule des suites géométriques) ; $\lim\limits_{x\to -a} \dfrac{x^m + a^m}{x^n + a^n} = (m/n)a^{m-n}$ si m et n sont pairs (même méthode) et est infinie ou vaut $2a^{m-n}$ sinon.

4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 \sin(1/x) + x^2 \cos x}{x^2 + |x|^{7/2}} = 1$ (en mettant x^2 en facteur) ; $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{1/\sqrt{x}} = 1$ (en passant aux logarithmes) ; $\lim\limits_{x\to -\infty} x \sin(1/x) = 1$ (en posant $X = 1/x$).

5 Cette limite vaut $a^{-1+1/n}/n$, ce qui s'obtient en posant $X = (x/a)^{1/n}$ et en utilisant la formule des suites géométriques

6 Si a est racine simple (de P et de Q), on a $P(x) = (x-a)P_1(x) \Rightarrow P'(a) = P_1'(a)$ et il est donc clair que $\lim\limits_{x\to a} P(x)/Q(x) = P'(a)/Q'(a)$, le résultat découle de la continuité de P' et de Q'. Dans le cas général, raisonnant par récurrence, on sait que a racine $k^{\text{ème}}$ de P est aussi racine $(k-1)^{\text{ème}}$ de P' ; on aura donc $\lim\limits_{x\to a} P'(x)/Q'(x) = \lim\limits_{x\to a} P''(x)/Q''(x) = \cdots = \lim\limits_{x\to a} P^{(k)}(x)/Q^{(k)}(x) = P^{(k)}(a)/Q^{(k)}(a)$; le même calcul que précédemment (ou la formule de Leibnitz) permet alors de conclure.

7 L'application $g : x \mapsto g(x) = f(x) - x$ (de $[0,1]$ dans $[-1,1]$) est continue (par hypothèse, et comme différence de deux fonctions continues) et change de signe (car $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$) ; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule donc en un x_0 tel que $f(x_0) = x_0$.

8 On vérifie aisément (par majoration) que $\sup f(A) \leq f(\sup A)$; l'égalité est de plus évidente si $\sup(A) \in A$ (c'est-à-dire si c'est le maximum de A). Sinon, on peut trouver une suite $x_n \in A$ (croissante) qui tend vers $\sup(A)$, et la limite des $f(x_n)$ est donc égale à $f(\sup(A))$ (par continuité) ; comme tout x de A est majoré par un des x_n, il est clair que $f(x) < f(x_n)$ et donc que $\sup f(x_n) = \sup f(A)$. Si par exemple $f(x) = x$ si $x < 1$ et $f(x) = x + 1$ si $x \geq 1$ (qui n'est pas continue en 1), on obtient un contre-exemple en prenant $A = [0, 1[$, car alors $\sup f(a) = 1$ et $f(\sup A) = 2$.

Solutions des exercices (Chapitre 9, Dérivation)

1 On veut calculer $\lim_{x \to a} \dfrac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{h \to 0} \dfrac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a \lim_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h}$, qui vaut donc e^a d'après l'hypothèse faite.

2 On a donc $\sqrt{1 + ax} = 1 + \dfrac{ax}{2} + ax\varepsilon(ax)$ et comme $\lim_{x \to 0} a\varepsilon(ax) = 0$, on en déduit que l'approximation affine tangente (en 0) à $\sqrt{1 + ax}$ est $1 + \dfrac{ax}{2}$. Plus généralement, on aura donc $\sqrt{ax + b} = \sqrt{b}\sqrt{1 + (a/b)x}$, d'approximation affine tangente $\sqrt{b} + \dfrac{a\sqrt{b}x}{2b}$, ce qui montre que le nombre dérivé de $\sqrt{ax + b}$ en 0 est $a/2\sqrt{b}$.

3 Plus généralement, si on a les deux approximations $f(x) = b + f'(0)x + x\varepsilon(x)$ et $g(X) = g(b) + g'(b)(X - b) + (X - b)\varepsilon_1(X)$, on obtient donc $g(f(x)) = g(b) + g'(b)f'(0)x + x\varepsilon_2(x)$, et donc $(g(f(x))'(0) = g'(f(0))f'(0)$ par exemple (un calcul analogue redonne la bonne formule quand x tend vers a); mais bien sûr il faut aussi démontrer que $\varepsilon_2(x) = g'(b)\varepsilon(x) + ((X - b)/x)\varepsilon_1(f(x) - b)$ tend vers 0 avec x, et c'est là qu'on retrouve le calcul de limite.

4 $(\operatorname{Arc\,sin} \sqrt{1 - x^2})' = -2x/2\sqrt{x^2(1 - x^2)}$ qui vaut $-1/\sqrt{1 - x^2}$ si $x > 0$ (et on peut, en contrôlant la «constante», en déduire que $\operatorname{Arc\,sin} \sqrt{1 - x^2} = \operatorname{Arc\,cos} x$ sur cet intervalle); $1/\sqrt{1 - x^2}$ si $x < 0$, et qui n'est pas définie en 0, en 1 ni en -1.

$$(\ln(\ln(\ln(\ln x))))' = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x) \ln(\ln(\ln x))}$$

et

$$\left(x^{x^{x^x}}\right)' = \left(\left((\ln x)^3 + (\ln x)^2 + \frac{\ln x}{x}\right) x^x + \frac{1}{x}\right) x^{\left(x^{x^x} + x^x\right)}$$

(ces deux dérivées s'obtenant «par récurrence» (poser $g(x) = x^x$, puis $h(x) = x^{g(x)}$ et $k(x) = x^{h(x)}$ par exemple).

5 Remarquant que $(1 - x^2)''' = 0$, et que $(\cos x)^{(k)} = (-1)^{k/2} \cos x$ (si k est pair) et $(-1)^{(k+1)/2} \sin x$ (si k est impair); et utilisant la formule de Leibnitz, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dx^n}((1 - x^2)\cos x) &= (1 - x^2)(\cos x)^{(n)} - 2nx(\cos x)^{(n-1)} - n(n-1)(\cos x)^{(n-2)} \\
&= \begin{cases} (-1)^{n/2}((1 + n^2 - n - x^2)\cos x + 2nx \sin x), & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^{(n+1)/2}((1 + n^2 - n - x^2)\sin x - 2nx \cos x), & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}
\end{aligned}$$

6 De même, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{e^x}{x}\right) &= e^x \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} \\
&= n! e^x \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(n-k)! x^{k+1}}
\end{aligned}$$

7 La fonction $x \mapsto 1/\cos x$ est une bijection dérivable de $[0; \pi] - \{0\}$ sur l'ensemble $]-\infty, -1[\, \cup \,]1, +\infty[$; sa bijection réciproque est donc dérivable aux points où la première est de dérivée non nulle, c'est-à-dire partout sauf en -1 et en 1. Sa dérivée est donnée par $(f^{-1})'(x) = 1/f'(f^{-1}(x))$, et comme $f'(x) = \sin x/\cos^2 x$, et que $f^{-1}(x) = a \iff \cos a = 1/x$, on en déduit que $f^{-1}(x) = 1/x\sqrt{x^2-1}$ (on pouvait aussi remarquer que $f^{-1}(x) = \operatorname{Arc}\cos(1/x)$).

8 On obtient $(1/f)' = -f'/f^2$, $(1/f)'' = (2f'^2 - f''f)/f^3$ et $(1/f)''' = (f'''f^2 + 6f''f'f - 6f'^3)/f^4$; on devine (ce qui se prouve aisément par récurrence) qu'on a pour la dérivée $k^{\text{ème}}$ une expression de la forme $P(f, f', f'', \dots, f^{(k)})/f^{k+1}$, où P est un «polynôme» de degré k; mais une forme plus précise semble difficile à obtenir.

9 Utilisant la dérivation des fonctions composées, on a $(f(-x))' = -f'(-x)$, d'où on déduit aisément que f paire implique f' impaire; et donc, si (après changement de repère) f est impaire, il en est de même de f'', qui doit donc s'annuler à la nouvelle origine, si elle y est définie.

10 On veut (en 0) écrire $ax^2 + bx + c = c + x(2a\theta x + b)$, on doit donc avoir $\theta = 1/2$; de même, pour avoir $x^n = x(n(\theta x)^{n-1})$, il faut que $\theta = (1/n)^{1/(n-1)}$ (qui est bien compris entre 0 et 1).

11 La fonction $f\colon x \mapsto f(x) = x^4(a + b\sin(1/x^2))$, prolongée en 0 par continuité, a pour dérivée (si $x \neq 0$) $f'(x) = 4ax^3 + 4bx^3\sin(1/x^2) - 2bx\cos(1/x^2)$, et $f'(0) = 0$ (par calcul direct; on voit donc qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$. Choisissant $a > b > 0$, il est clair que $f(x) \geq (a-b)x^4 > 0$ si $x \neq 0$, et que $f(0) = 0$; 0 est donc le minimum absolu de f sur $\mathbf{R}$. f' s'annule bien en 0, comme le veut la démonstration du lemme de Rolle; mais au voisinage de 0, $f'(x)$ est du signe de $-b\cos(1/x^2)$ (les autres termes étant négligeables), qui s'annule une infinité de fois; on ne peut donc pas vraiment dire que f' s'annule en changeant de signe...

Une règle complète semble impossible à formuler pour ce cas, car en prenant $b < a$, 0 ne serait plus un minimum absolu, alors que le comportement de f' ne changerait pas; tout ce qu'on peut dire, c'est que si f' ne s'annule pas dans tout voisinage de a (s'il existe un voisinage de a où f' est non nulle, sauf en a), alors la règle est correcte. Le cas des tangentes d'inflexion se traiterait de même en remplaçant f' par f''; ainsi, une fonction telle que $x^7(a + b\sin(1/x^2))$ (avec $a > 6b$) possède une dérivée seconde analogue à f', et une tangente d'inflexion en 0.

Solutions des exercices (Chapitre 10, Approximations)

1 Non; on a par exemple $x+1 \underset{+\infty}{\sim} x$, mais $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^{x+1}}{e^x} = e \neq 1$

2 Dire que $e^f \sim e^g$, c'est dire que $\lim e^{f-g} = 1$, c'est-à-dire que $\lim(f-g) = 0$. Inversement, si $\lim(f-g) = 0$ (et donc si $e^f \sim e^g$), on n'a pas forcément $f \sim g$ (mais c'est le cas si $\lim f \neq 0$, car alors $f-g$ sera négligeable par rapport à f). De même, $e^f \ll e^g \iff \lim(g-f) = +\infty$; on voit ainsi qu'on peut avoir $1 \underset{-\infty}{\ll} x$, alors que $e^x \underset{-\infty}{\ll} e^1$, et donc qu'aucune des deux situations n'implique l'autre.

3 Déterminer la limite (en $+\infty$) de $\dfrac{x^{\alpha_1}(\ln x)^{\beta_1}(\ln\ln x)^{\gamma_1}}{x^{\alpha_2}(\ln x)^{\beta_2}(\ln\ln x)^{\gamma_2}}$ revient à déterminer celle de $x^\alpha(\ln x)^\beta(\ln\ln x)^\gamma$ (avec $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, etc...). Or l'échelle $\ln x \underset{\infty}{\ll} x^\alpha$ (pour $\alpha > 0$) peut (par changement de variable) se prolonger à $(\ln\ln x)^\gamma \underset{\infty}{\ll} (\ln x)^\beta \underset{\infty}{\ll} x^\alpha$ (pour tous α, β et γ positifs); on en déduit le résultat demandé.

4 Les règles de calcul de DL aboutissent (sans «astuces» particulières) à :

$$\ln\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = 2x + \frac{4}{3}x^3 + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{(utiliser } \ln(a/b) = \ln a - \ln b\text{)}$$

$$\frac{\operatorname{Arc}\sin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x)$$

$$e^{\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{7x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$$

$$e^{x\cos x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{11x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$$

Voici un exemple de rédaction «rigoureuse» de ce dernier DL : on a d'abord

$$y = (1+x^2)^{\frac{1}{x}} = e^u, \text{ avec } u = \frac{1}{x}\ln(1+x^2)$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$, y est développable, et on a $y = 1+u+u^2/2+u^3/6+u^3\varepsilon(u)$. D'autre part,

$$u = \frac{1}{x}\ln(1+x^2) = \frac{1}{x}(x^2 - \frac{x^4}{2} + x^4\varepsilon_1(x)) = x - \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon_1(x);$$

en remplaçant, on obtient

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x).$$

5 Il faut pousser les calculs jusqu'à l'ordre 7, car les premiers termes se compensent; on trouve finalement que $\operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^7}{45}$

6 On peut écrire $g(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$; on sait que $f(x) = x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^5)$, par identification dans $f \circ g$, on trouve $a = 1$, $b = 1/6$ et $c - b/2 + 1/120 = 1$, d'où $g(x) = x + x^3/6 + 129x^5/120 + o(x^5)$ (on pourra vérifier qu'alors $g \circ f = f \circ g + o(x^5)$)

7 En utilisant (deux fois) les quantités conjuguées, on obtient :

$$A = \sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\right)};$$

en raisonnant par équivalences, par exemple en remarquant que $\sqrt{x^2+1} \sim x$, on obtient (à l'infini) :

$$A \sim \frac{1}{2\sqrt{2}} x^{-\frac{3}{2}}$$

8 En posant $X = 1/x^3$, on a

$$\sqrt{x^3+1} = x^{3/2}\sqrt{1+X} = x^{3/2}(1 + \frac{x^{-3/2}}{2} - \frac{x^{-3}}{8} + o(x^{-3}))$$

et donc

$$\sqrt{x^3+1} = x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} - \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{8} + o(x^{-\frac{3}{2}}).$$

9 Posant $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, on voit que $\lim_\infty \frac{P(x)^{1/3}}{x} = a^{1/3}$, et donc que $[\, Y = a^{1/3}X]$ est direction asymptotique. Il est plus délicat de déterminer la limite de $f(x) - a^{1/3}x$; remarquant qu'on peut écrire $f(x) = a^{1/3}x\sqrt[3]{1+g(x)}$ avec $\lim_\infty g(x) = \lim_\infty \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} + \frac{d}{ax^3} = 0$, on peut alors utiliser le DL (généralisé) $\sqrt[3]{1+g(x)} = 1 + g(x)/3 - g^2(x)/9 + o(g^2(x))$ (l'ordre 1 serait d'ailleurs suffisant); d'où on déduit l'asymptote oblique $[\, Y = a^{\frac{1}{3}}X + \frac{b}{3a^{2/3}}]$. On peut généraliser le même calcul au polynôme $Q(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots$, et on obtient finalement que la fonction $Q(x)^{\frac{1}{n}}$ admet (en $+\infty$) l'asymptote oblique $[\, Y = a^{\frac{1}{n}}X + \frac{b}{na^{\frac{(n-1)}{n}}}]$.

10 En utilisant des DL appropriés, on obtient finalement les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\ln \operatorname{sh} x} - \sqrt[3]{x} = 0 \quad \text{, car } \ln \operatorname{sh} x = x - \ln 2 + o(1)\ldots$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x} = e \text{ (utiliser } \ln f)$$

Posant $y = \left(\frac{1^x + 2^x + \cdots + n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$, on a

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1^x + 2^x + \cdots + n^x}{n}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^{x\ln 1} + e^{x\ln 2} + \cdots + e^{x\ln n}}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1 + x\ln 1 + 1 + x\ln 2 + \cdots + 1 + x\ln n + o(x)}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{x\ln n! + x\varepsilon(x)}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{x\ln n! + x\varepsilon(x)}{n}\right) + x\varepsilon_1(x) = \frac{\ln n!}{n} + x\varepsilon_2(x)$$

et donc en définitive $\lim_{x\to 0} y = \sqrt[n]{n!}$.

Solutions des exercices (Chapitre 11, Suites numériques)

1 Si $\lim u_n = L$, alors (par changement d'indice, et remarquant que $\lim n = +\infty \Rightarrow \lim(n+1) = +\infty$) $\lim u_{n+1} = L$; on en déduit que $\lim(u_{n+1} - u_n) = L - L = 0$. La réciproque n'est pas vraie : prenant par exemple $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, on a $\lim u_n = +\infty$, alors que $\lim(u_{n+1} - u_n) = \lim(1/n+1)) = 0$.

2 $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{n+2} \sim n$, qui diverge donc ($\lim u_n = +\infty$) ; plus précisément, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n^2+5n+5}{n+3} - \dfrac{n^2+3n+1}{n+2} = \dfrac{n^2+5n+7}{(n+2)(n+3)}$, ce qui montre ($n$ étant positif) que la suite (u_n) est croissante. De même, $(v_n) = \left(\dfrac{n^2-1}{n^2+4}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante, car $v_{n+1} - v_n = \dfrac{10n+5}{(n^2+4)(n^2+2n+5)}$, et (v_n) converge vers 1.

3 La suite (u_n) est évidemment croissante, puisque $u_{n+1} - u_n = 1/(n+1)^2$; montrons que (v_n) est décroissante : on a $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + 1/(n+1) - 1/n = (n + n(n+1) - (n+1)^2)/n(n+1)^2 = -1/n(n+1)^2 < 0$; comme $\lim(v_n - u_n) = \lim 1/n = 0$, les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes (par définition), et ont donc une limite commune (finie) ℓ. On sait que $u_n < \ell < v_n$, ce qui montre que u_n est une valeur approchée par défaut de ℓ à $1/n$ près. Un programme simple donne $u_{10000} \simeq 1,644834$ et comme on sait que la vraie valeur de ℓ est $\pi^2/6 \simeq 1,644934$, on voit que v_n semble être une bien meilleure approximation que u_n ; le même programme montre en effet que $v_{10000} - \pi^2/6 = 5.10^{-9}$ (à la précision des calculs), d'où on pourrait «deviner» une formule telle que $\ell = v_n - 1/2n^2 + o(1/n^2)$.

4 Posant $k = |k|e^{i\theta}$ et $z_0 = Ae^{ix}$, on voit aisément que $z_n = A|k|^n e^{i(n\theta+x)}$, de partie réelle $u_n = A|k|^n \cos(n\theta+x)$ et de partie imaginaire $v_n = A|k|^n \sin(n\theta+x)$. Si $|k| < 1$, il est clair que ces deux suites convergent (vers 0) ; sinon, elles divergeront en général : supposons en effet que u_n converge (vers L) par exemple, et que $L \neq 0$; on aura donc $\lim u_{n+1}/u_n = L/L = 1$, et donc $\lim |k| \cos((n+1)\theta + x)/\cos(n\theta + x) = 1$, ce qui n'est possible que si $\theta = 0$ et $k = 1$ (c'est en fait assez difficile à démontrer) ; le cas $L = 0$ est analogue (on montre alors que l'on doit avoir $u_n = 0$ pour tout n, car on doit alors avoir $\lim \cos(n\theta + x) = 0$).

5 $6u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n$ définit une récurrence linéaire ; cherchons donc les suites géométriques $u_n = k^n$ qui la vérifient. On doit avoir $6k^2 = 5k - 1$, et donc $k = 1/2$ ou $k = 1/3$; cherchons A et B tels que la suite $v_n = A/2^n + B/3^n$ vérifie les conditions initiales données ; on obtient $v_0 = A+B = 0$ et $v_1 = A/2 + B/3 = 1$, donc $A = 6$ et $v_n = 6(1/2^n - 1/3^n)$; enfin $\sum_{k=0}^{n} v_k = 6\left(\dfrac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} - \dfrac{1-(1/3)^{n+1}}{1-1/3}\right)$, et donc $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k = 6(2 - 3/2) = 3$

6 Soit $u_n = k^n$ une suite géométrique vérifiant (E): $u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n$; on doit donc avoir $k^3 = k^2 + k + 1$; or cette équation admet la racine réelle $\alpha \simeq 1,8392868$ (obtenue par dichotomie) et les deux racines complexes conjuguées β et $\overline{\beta}$, avec $\beta \simeq -0,419643 + 0,60629i$; montrons par récurrrence que la suite cherchée est de la forme $u_n = A\alpha^n + B\beta^n + C\overline{\beta}^n$ (c'est vrai par calcul direct pour $n = 0$, 1 et 2 (comme on le verra plus loin) et la récurrence s'obtient par «linéarité» de (E), et du choix fait pour α et β). On voit donc qu'il suffit de déterminer A, B et C ; on obtient finalement (ce qu'on peut contrôler en remarquant qu'on doit avoir par exemple $u_6 = 9$)

$$u_n = 0,23684\alpha^n + \Re((-0,61842 - 0,0374i)\beta^n)$$

7 Il est clair que (u_n) est strictement croissante ; si elle était majorée, elle convergerait vers L, et ($[x \mapsto x + e^{-x}]$ étant continue) on aurait $L = L + e^{-L}$, ce qui est impossible. On a donc $\lim u_n = +\infty$. Si on a par exemple $u_N \simeq 10$, les e^{-u_n} (pour $n > N$) seront inférieurs à 5.10^{-5}, et il faudra donc au moins 20000 termes pour atteindre $u_{N'} \simeq 11$; on voit aisément que la suite diverge extrèmement lentement, et que n_0 tel que $u_{n_0} > 50$ par exemple ne peut être calculé ($n_0 > e^{50} \simeq 10^{21} \ldots$)

Le comportement de v_n semble analogue (on ajoute sans cesse des termes très petits), mais c'est une erreur «intuitive» : on sait en fait que $v_n = (1-e^{-n-1})/(1-1/e)$, qui converge vers $e/(e-1) \simeq 1,582$

8 La suite définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \ln(u_n+2)$ est croissante, en effet $u_1 = \ln 3 > 1$ et (par récurrence) si $u_{k+1} > u_k$, il est clair que $u_{k+2} = \ln(u_{k+1}+2) > \ln(u_k+2) = u_{k+1}$; de même, u_n est majorée par 2, car $u_k < 2 \Rightarrow \ln(u_k + 2) < \ln 4 < 2$; u_n copnverge donc vers une limite L qui ($\ln(x + 2)$ étant continue) vérifie $\ln(L + 2) = L$ (et $1 < L \leq 2$). Plus précisément, posant $f(x) = \ln(x + 2)$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à f (sur l'intervalle $[1, 2]$, et en remarquant que dans cet intervalle $1/4 \leq f'(x) \leq 1/3$) donne (pour tout a et b de cet intervalle

$$\frac{|b-a|}{4} \leq |f(b) - f(a)| \leq \frac{|b-a|}{3}$$

Appliquant cette inégalité à u_n et à L, on obtient $|u_{n+1} - L| = |f(u_n) - f(L)| \leq |u_n - L|/3 < |u_n - L|/2$ et par récurrence $|u_n - L| \leq |u_0 - L|/2^n < 1/2^n$; ainsi u_{24} doit être une valeur approchée de L à 10^{-7} près. On obtient en fait (par dichotomie) $L \simeq 1,14619322$ et $u_{13} \simeq 1,14619317$, ce qui est normal puisque les encadrements réels sont meilleurs que ceux utilisés.

9 Il faut d'abord déterminer les intervalles de stabilité de la fonction $f\colon x \mapsto x^2 - 1/2$; remarquons que si $-\sqrt{2}/2 < x < 0$, on a $f(x) < 0$ et $f(x) \geq -1/2 > -\sqrt{2}/2$, l'intervalle $]-\sqrt{2}/2, 0[$ est donc bien un intervalle de stabilité (où f est décroissante). Comme $f(x) = x \iff x \in \{\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\}$, on voit que l'intervalle $[\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty[$ est aussi un intervalle de stabilité. Pour $a > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, la suite (u_n) est donc croissante et diverge ; pour $-\sqrt{2}/2 < a < 0$, la suite est oscillante (et on peut montrer, en étudiant la fonction $f \circ f$, qu'elle converge vers $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$) ; les autres cas se ramènent à ceux-là après une (ou deux) itérations, sauf pour les suites «stationnaires» correspondant à $u_k = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (ce qui ne peut se produire que pour $a = \pm\frac{1+\sqrt{3}}{2}$)

Solutions des exercices (Chapitre 12, Intégration)

1 Par intégration par parties, on obtient

$$\int_1^e x^n \ln x \, dx = \left[\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^n}{n+1}\, dx = \frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}$$

De même, en prenant $\sin \ln x = 1 \times \sin \ln x$, on obtient

$$I = \int_1^e \sin \ln x \, dx = \Big[x \sin \ln x\Big]_1^e - \int_1^e \cos \ln x \, dx$$

et à l'aide d'une nouvelle intégration par parties $I = e\sin 1 - e\cos 1 + 1 - I$, et donc $I = \dfrac{e(\sin 1 - \cos 1)+1}{2}$. Enfin, on obtient les primitives de $x^2 \operatorname{Arc\,tg} x$ en calculant $\displaystyle\int_0^x t^2 \operatorname{Arc\,tg} t \, dt$, ce qui, par intégration par parties, vaut $\dfrac{x^3 \operatorname{Arc\,tg} x}{3} - \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^t \frac{t^3}{1+t^2}\, dt$; finalement, on obtient

$$\int x^2 \operatorname{Arc\,tg} x \, dx = \frac{x^3 \operatorname{Arc\,tg} x}{3} + \frac{\ln(x^2+1) - x^2}{6} + C^{te}$$

2 On obtient

$$\int x e^{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}}(x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - 6) + C^{te}$$

(en se ramenant à une intégrale définie, en posant $X = \sqrt{x}$, puis en intégrant par parties)

$$\int \sqrt{\frac{\operatorname{Arc\,sin} x}{1-x^2}}\, dx = \frac{2}{3}(\operatorname{Asin} x)^{3/2}$$

(poser $x = \sin t$) et

$$\int x^m (\ln x)^p \, dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^p}{m+1} - \frac{p}{m+1}\int x^m (\ln x)^{p-1}\, dx$$

(en intégrant par parties) ce qui permet de calculer ces primitives de proche en proche.

3 $x = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$ est une application bijective de $[0, \pi/2]$ sur $[a, b]$; si $a < b$, on obtient finalement (en pensant à écrire $x - a = (b-a)\sin^2\theta$ et $b - x = (b-a)\cos^2\theta$)

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\, dx = \frac{\pi(b-a)^2}{8}$$

(si $a > b$, on obtient l'opposé de ce résultat)

4 En posant $tx = \sqrt[3]{x^3+x^2}$, c'est-à-dire $x = 1/(t^3-1)$ (qui est bijective de l'intervalle $]1, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$ par exemple), on obtient $\displaystyle\int_a^X \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+x^2}} = \int_{\sqrt[3]{a^3+a^2}}^{\sqrt[3]{X^3+X^2}} \frac{-3t}{t^3-1}\, dt$; il ne reste alors plus qu'à intégrer cette fraction rationnelle; on obtient

$$\int \frac{-3t}{t^3-1}\, dt = -\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2t+1)\right) + \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) - \ln|t-1| + C^{te}$$

et donc (à une constante près sur l'intervalle $]0, +\infty[$)

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 + 2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\right)\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^{2/3} + \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} + 1\right) - \ln\left|\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} - 1\right|$$

5 On obtient (élémentairement)

$$\int \frac{x^4+x^2+1}{x-2}\,dx = \frac{3x^4+8x^3+30x^2+120x}{12} + 21\ln|x-2| + C^{te}$$

$$\int \frac{3x+4}{2x^2-1}\,dx = (\frac{3}{4}-\sqrt{2})\ln|x\sqrt{2}+1| + (\frac{3}{4}+\sqrt{2})\ln|x\sqrt{2}-1| + C^{te}$$

et

$$\int \frac{x^4}{x^{10}+1}\,dx = \frac{\operatorname{Arc\,tg}(x^5)}{5} + C^{te}$$

6 De même,

$$\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}\,dx = \frac{\ln(x^4-4x+1)}{4} + C^{te}$$

$$\int \frac{dx}{x^4+x^2} = -\operatorname{Arc\,tg} x - \frac{1}{x} + C^{te}$$

et

$$\int \frac{x^3}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx = -\frac{27}{2}\ln|x+3| + 8\ln|x+2| - \frac{\ln|x+1|}{2} + x + C^{te}$$

(utiliser les pôles simples)

7 On obtient (par les substitutions données dans le cours ($X = e^x$, formules en t, etc…)

$$\int \frac{e^x}{\operatorname{sh} x}\,dx = \ln(e^{2x}-1) + C^{te}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln \operatorname{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}) + C^{te}$$

(penser à utiliser $\cos x + \sin x = A\cos(x+\varphi)$) et

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = \frac{2(\cos^2 x - 5)\sqrt{\cos x}}{5} + C^{te}$$

8 Enfin, on a

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2} + C^{te}$$

(le piège, c'est qu'elle est trop facile !) et

$$\int \frac{dx}{(4+4x-x^2)^{3/2}} = \frac{x-2}{8\sqrt{4+4x-x^2}} + C^{te}$$

(en posant $X = (x-2)/2\sqrt{2}$)

9 On sait que (pour tout x) $-|h(x)| \leq h(x) \leq |h(x)|$, et donc que (si $a < b$) $\left|\int_a^b h(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |h(x)|\,dx$; et comme $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$ (inégalité triangulaire), on aura

$$\left|\int_0^1 (f(x)+g(x))\,dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)+g(x)|\,dx \int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |g(x)|\,dx$$

10 Sur l'intervalle $[1,n]$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est monotone, et donc son intégrale est encadrée par les sommes de Riemann de pas 1, qui sont respectivement $u_n(\alpha)$ et

$u_{n+1}(\alpha)-1$. Réciproquement, $u_n(\alpha)$ est encadré par $\int_1^n x^\alpha\,dx$ et par $\int_1^{n+1} x^\alpha\,dx$; or (si $\alpha<-1$) cette dernière intégrale valant $((n+1)^{\alpha+1}-1)/(\alpha+1)$ est majorée (pour tout n) par $-1/(\alpha+1)$, et comme la suite $u_n(\alpha)$ est croissante, cela montre qu'elle est convergente.

11 $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\pi/n)$ est la somme de Riemann (de pas $1/n$) associée à $f(x)=\sin(\pi x)$ sur l'intervalle $[0,1]$ (puisque $f(0)=0$); u_n converge donc vers $\displaystyle\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = 2/\pi$. Les méthodes de calcul de sommes trigonométriques du chapitre 3 conduisent à $u_n = \sin((n+1)\pi/2n)/n\sin(\pi/2n)$, et donc (par équivalents) à $\lim u_n = 2/\pi$

12 D'après la formule de la moyenne, $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{x-a}\,dt = f(c)$ (avec $a<c<x$), et donc $\displaystyle\lim_{x\to a}\int_a^x \frac{f(t)}{x-a}\,dt = f(a)$ par continuité de f.

13 Si g est positive, posons $f(x)=g(x)\varepsilon(x)$, on a sur un intervalle assez petit $\varepsilon(x)<\epsilon$, et donc $|\int_0^x f(t)\,dt| < \epsilon|\int_0^x g(t)\,dt|$, ce qui prouve que la première intégrale est négligeable devant la seconde (le cas où g est de signe variable n'est pas aussi facile à traiter, et en fait le résultat est faux pour des fonctions telles que $g(x)=x^2\sin(1/x)$). En $+\infty$, la relation analogue est fausse en général, ainsi $2/x^3 \ll 1/x^2$, mais $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x(2/t^3)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x(1/t^2)dt = 1$

14 L'exercice précédent montre que si $f=f_1+f_2$ et que $f_2(x)$ est négligeable (en 0) par rapport à x^n, on a $\int_0^x f_2(t)\,dt \underset{0}{\ll} x^{n+1}$, ce qui montre que si f_1 est un DL_n de f, $\int f_1(x)\,dx$ sera (à une constante près) un DL_{n+1} de $\int f(x)\,dx$.

15 Après le changement de variable $t = x\sin u$ (légal dans cet intervalle si $x\neq 0$) on obtient

$$f(x) = \text{signe}(x)\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\frac{du}{\sqrt{1+x^2\sin^2 u}}$$

(d'ailleurs, f est clairement impaire). Encadrant alors $\sin^2 u$, on voit que $f(x)$ est compris entre $\frac{\pi}{3\sqrt{1+x^2/4}}$ et $\pi/3$ et donc que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \pi/3$.

16 Au premier terme près, u_n est la somme de Riemann (de pas $1/n$) associée à la fonction g définie (sur $[0,1]$ par $g(x)=e^{\frac{1}{x^2-1}}$ si $x<1$ et $g(1)=0$. Cette fonction étant continue, elle est intégrable, et donc u_n converge vers $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$.

Solutions des exercices (Interlude : fractions rationnelles)

1 Si a est positif, on a

$$\frac{1}{x^2-a}=\frac{1/2\sqrt{a}}{x-\sqrt{a}}-\frac{1/2\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}$$

(dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{C}$); si a est nul, $1/x^2$ est déjà décomposée; enfin, si $a<0$, $1/(x^2-a)$ est décomposée dans $\mathbf{R}$, et dans $\mathbf{C}$ on a

$$\frac{1}{x^2-a}=\frac{i/2\sqrt{-a}}{x+i\sqrt{-a}}-\frac{i/2\sqrt{-a}}{x-i\sqrt{-a}}$$

2 Par la méthode des pôles, on obtient

$$\prod_{i=1}^{n}(x-i)^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x-i},\text{ avec } a_i=1/\prod_{k\neq i}(k-i)=\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!(n-i)!}$$

3 Dans $\mathbf{C}$, on a

$$\frac{1}{z^4-1}=\frac{1}{4(z-1)}-\frac{1}{4(z+1)}+\frac{i}{4(z-i)}-\frac{i}{4(z+i)}$$

Appliquant la méthode des pôles aux pôles simples $(e^{2ki\pi/n})$ de $1/(z^n-1)$, on obtient

$$\frac{1}{z^n-1}=\sum_{k=0}^{n}-1\frac{a_k}{z-e^{2ki\pi/n}},\text{ avec } a_k=1/\prod_{K\neq k}(e^{2Ki\pi/n}-e^{2ki\pi/n})$$

On peut simplifier l'écriture de a_k en utilisant la technique de factorisation vue au chapitre 3 :

$$e^{2Ki\pi/n}-e^{2ki\pi/n}=2ie^{i(K+k)\pi/n}\sin((K-k)\pi/n),$$

mais en réalité, il suffit de remarquer que $a_k=\lim\limits_{z\to e^{2ki\pi/n}}(z-e^{2ki\pi/n})/(z^n-1)=1/ne^{2ki\pi(n-1)/n}=e^{\frac{2ki\pi}{n}}/n$; toutefois cela suppose qu'on peut appliquer les limites et la règle de l'Hopital dans $\mathbf{C}$; une justification rigoureuse passe par la démonstration donnée dans l'exercice 6 du chapitre 8.

4 On obtient (par identification)

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}$$

5 Après factorisation, on obtient les coefficients de plus haut degré par la méthode des pôles, et les autres par identification; on trouve

$$\frac{1}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{4(x+1)^2}-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4(x-1)^2}$$

6 Le terme en $1/x$ s'obtient par pôle simple $(x=0)$; on obtient les termes en $1/(x-1)$ et $1/(x+1)$ par changement de variable et DL; les termes en $1/(x^2+1)$ sont obtenus par identification, après avoir remarqué que la fonction est impaire. On trouve

$$\frac{1}{x(x^4-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{16(x+1)^2}-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{16(x-1)^2}-\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{x}{4(x^2+1)^2}$$

7 Par changement de variable et DL, on obtient les termes en $1/(x-1)$, et plus précisément

$$\frac{x^8}{(x-1)^2(x^2+x+1)^3}=1+\frac{5}{27(x-1)}+\frac{1}{27(x-1)^2}-\frac{32x^5+102x^4+136x^3+127x^2+66x+23}{27(x^2+x+1)^3}$$

La décomposition de ce dernier terme ne peut se faire simplement qu'en divisant 3 fois de suite par x^2+x+1 (le reste est alors le numérateur $ax+b$ cherché); on obtient finalement

$$1+\frac{5}{27(x-1)}+\frac{1}{27(x-1)^2}-\frac{32x+38}{27(x^2+x+1)}+\frac{12x+5}{9(x^2+x+1)^2}-\frac{x}{3(x^2+x+1)^3}$$

Ce genre de calcul est devenu d'autant plus académique qu'un logiciel comme DERIVE obtient cette décomposition en moins d'une seconde !

Solutions des exercices (Chapitre 13, Équations différentielles)

1 On a d'abord $xY' + Y = 0 \iff Y(x) = K/x$; par variation de la constante on est amené à résoudre $K'(x) = 1/x^2$, donc on obtient (sur $]0, +\infty[$) $y(x) = -1/x^2 + K/x$.

2 L'équation sans second membre a pour solution $Y = K\cos x$; la méthode de variation de la constante donne $K'(x) = 1/\cos^2 x = (\tan x)'$, donc $y(x) = \sin x + K\cos x$ (qu'on pouvait deviner directement).

3 L'équation sans second membre a pour solution $Y = Ke^{x^2/2}$; la méthode de variation de la constante donne $K'(x) = \sin x.e^{-x^2/2}$, qu'on ne sait pas intégrer ; on obtient donc

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_a^x e^{\frac{-t^2}{2}} \sin t \, dt$$

4 On a $Y' = y' + y''$, et par conséquent l'équation équivaut à $2Y' + Y = f(x)$ qui est du premier ordre, puis à résoudre $y' + y = g(x)$ (où g est une des solutions trouvées). Ainsi, si $f = 0$, on obtient d'abord $Y = Ke^{-x/2}$, puis (par variation de la constante, ou directement) $y = Ae^{-x} + 2Ke^{-x/2}$, ce qui est bien de la forme annoncée par le théorème de Cauchy dans ce cas. De même, si $f(x) = e^{-x}$, on obtient $g(x) = Ke^{-x/2} - e^{-x}$, mais obtenir ensuite y par variation de constante n'est guère commode ; on trouve $y(x) = Ae^{-x} + 2Ke^{-x/2} - xe^{-x}$, beaucoup plus facile à déterminer par identification (toutefois, cette méthode justifie le terme en xe^{-x})

5 Posant (comme dans l'exercice précédent) $Y = y + y'$, on est amené à résoudre $Y'' + Y = 0$, donc $Y = A\cos(x + \varphi)$, puis à résoudre $y' + y = A\cos(x + \varphi)$ qui (par identification) donne $y = Ke^{-x} + (A/2)\sin(x + \varphi) + (A/2)\cos(x + \varphi)$; mais (φ étant quelconque) cette forme est en fait équivalente à $y = Ke^{-x} + B\sin x + C\cos x$, qui généralise donc la théorie de Cauchy à l'ordre 3 ; de plus, l' «équation caractéristique» était ici $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, de racines -1, i et $-i$, ce qui semble montrer que la méthode fonctionne encore.

6 On a bien $e^x + xe^x - (x+1)e^x = 0$; l'équation étant linéaire, le théorème de Cauchy dit qu'il existe une fonction $g(x)$, non proportionnelle à e^x, et que l'ensemble des solutions est de la forme $Ae^x + Bg(x)$. Posons $y(x) = K(x)e^x$, on obtient donc $K''e^x + 2K'e^x + Ke^x + x(K'e^x + Ke^x) - (x+1)Ke^x = 0$, c'est-à-dire $K''e^x + (x+2)K'e^x = 0$; K' est donc solution de l'équation différentielle (d'ordre 1) $Y' + (x+2)Y = 0$, et donc $K'(x) = Ae^{-2x-x^2/2}$. On ne sait malheureusement pas intégrer cette fonction, et en définitive, on aura donc $g(x) = e^x \int_0^x e^{-2t-t^2/2} \, dt$.