Solutions des exercices : Chapitre 1, Le langage mathématique

1 Ce sont des problèmes de «parenthèses», en effet on a $(a+b)+c = a+(b+c)$, mais $a/(b/c) = ac/b \neq (a/b)/c = a/bc$. La convention «logique» est alors de commencer à gauche; mais $(a^b)^c = a^{(bc)}$, c'est pourquoi (pour ne pas faire double emploi) les mathématiciens ont décidé (mais pas les calculettes !) de poser $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

2 Seule la première écriture est légale (mais déconseillée).

3 a_1, dans ce contexte, est seulement un «nom» de constante, et non pas une valeur, calculée en fonction de 1, comme ce pourrait être le cas dans un texte tel que «Soit A_t le point de coordonnées $(t^2, t+3)\dots$»

4 Il faut prendre l' «intersection» des différents domaines; dans l'ordre, on doit avoir $x > 0$ (pour que x^x soit défini), $1 - x^x \neq 0$ (ce qui équivaut à $x \neq 1$), $x \neq \pi/2 + k\pi$ (avec $k \in \mathbf{Z}$) et $(*)$ $e^{\cos(\cos x^2)} + 3 - x^2 > e$ (pour pouvoir prendre trois fois successivement le logarithme); cette dernière condition n'étant pas toujours vérifiée (elle est vraie pour $|x| < 1/2$ et fausse pour $x > 2$, par exemple), on voit que le domaine de
$$\frac{\ln\ln\ln(e^{\cos(\cos x^2)} + 3 - x^2) + \tan x}{1 - x^x}$$
est presque explicité, mais on ne peut pas vraiment le donner sous forme d'intervalles, car il faudrait pouvoir résoudre complètement l'inéquation $(*)$.

5 Exploiter $A^a.A^a = A^{a+a}$; on en déduit que si $9^{1/2}$ existe, son carré doit valoir 9; de même, $A^a.A^0 = A^{a+0} = A^a$ conduit (si $A \neq 0$) à $A^0 = 1$. Le prolongement à 0^0 n'est pas clair : on a $x^0 = 1$ pour tout x non nul, mais $0^x = 0$! Enfin, poser $(-1)^{1/2} = i$ reviendrait à dire que i est la racine carrée positive de -1 (sinon, pourquoi ne pas choisir $-i$?), mais on verra au chapitre 3 qu'il n'est pas possible de munir les complexes d'un «signe».

6 L'interprétation évidente «x inconnue, t constante (ou t paramètre)» correspond à la solution $\mathcal{S} = \{3-2t\}$; mais on peut aussi, par exemple, prendre x et t inconnues, d'où la solution (paramétrique) $\mathcal{S} = \{(3-a; a/2)_{a\in\mathbf{R}}\}$... Des interprétations plus étranges encore sont possibles : l'équation est en effet équivalente à $x+2t = 3+0.y$, avec (si x et y sont les inconnues) la solution paramétrique $\mathcal{S} = \{(3-2t, b)_{b\in\mathbf{R}}\}$, que nous apprendrons, au chapitre 6, à noter $\{3-2t\} \times \mathbf{R}$.

7 a) La théorie du discriminant (ou l'écriture sous la forme «canonique» $x^2 - 2tx + 1 = (x-t)^2 - (t^2-1)$) montre qu'on doit avoir $t^2 \geq 1$ pour que $x^2 - 2tx + 1 = 0$ admette des solutions; on aura donc une solution $\mathcal{S}_t$ (selon le paramètre t) donnée par :
$$\begin{cases} \mathcal{S}_t = \emptyset & \text{si } t \in \,]-1,1[\\ \mathcal{S}_t = \{t - \sqrt{t^2-1}; t + \sqrt{t^2-1}\} & \text{si } |t| > 1 \\ \mathcal{S}_1 = \{1\} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{-1} = \{-1\} & \end{cases}$$

b) On verra au chapitre 19 l'intérêt de ce genre de système paramétrique; on obtient ici, si $\lambda \notin \{-3, 3\}$, $\mathcal{S}_\lambda = \{(0,0)\}$, $\mathcal{S}_3 = \{(a,a)\}_{a\in\mathbf{R}}$ et $\mathcal{S}_{-3} = \{(b,-2b)\}_{b\in\mathbf{R}}$.

8 Rien de bon.

9 Un contre-exemple constitue bien une réfutation (une preuve de la proposition contraire); un autre contre-exemple (vrai ou faux) n'y changera plus rien.

10 Comme dans le cas de $\sqrt{2}$, on remarque que p^3 pair entraîne p pair. Pour $\sqrt{5}$, l'argument essentiel porte cette fois sur le fait que tout carré de la forme $5p'$ est le carré d'un nombre n de même forme ; ce qui se prouve, par exemple, en remarquant qu'il n'y a que 5 cas possibles ($n = 5a + 1$; $n = 5a + 2$; ...) ; une analyse du cas $\sqrt{n}$ demanderait de généraliser encore cette «théorie» aux n restes possibles ; seules les méthodes du chapitre 5 nous permettront de conclure.

11 Calquer l'exemple du cours : essentiellement, pour pouvoir appliquer le raisonnement par récurrence, il suffit de montrer que $(n(n + 1)(2n + 1)/6) + n^2 = (n + 1)(n + 2)(2n + 3)/6$. Là encore, nous découvrirons au chapitre 5 des techniques plus efficaces.

Chapitre 2, Rappel des techniques de calcul dans $\mathbf{R}$

1 Le «truc» consiste à utiliser les logarithmes (et même la fonction `log` définie par $\log_{10}(x) = \ln x/\ln 10$) ; on a en effet $10^n < 2^{10000} < 10^{n+1} \iff n\ln 10 < 10000\ln 2 < n + 1$. On en déduit que $2^{10000} \simeq 1,995 \times 10^{3010}$, que $2^{-10000} \simeq 5,012 \times 10^{-3011}$, que $e^{e^{10}} \simeq 9,3875 \times 10^{9565}$; enfin, pour 1000!, il vaut mieux rédiger un petit programme (qui additionne les logarithmes) ; on obtient $1000! \simeq 4,0238 \times 10^{2567}$.

2 En utilisant la forme canonique (ou à l'aide du «changement de variable» $X = x^2$), on obtient $x^4 + 5x^2 - 36 = (x^2 - 4)(x^2 + 9) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 9)$. De même, en posant $X = x^2$, et en utilisant $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$, on obtient $x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$; on peut alors remarquer que $x^4+x^2+1 = (x^4+2x^2+1)-x^2$, et donc que $x^6 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

3 $8x^3+12x^2+6x+1 = (2x+1)^3$; pour factoriser $x^3+2x+12$, on remarque que -2 est «racine évidente» ; par identification, on obtient $x^3+2x+12 = (x+2)(x^2-x+6)$.

4 On obtient (pour $x \neq y$ et $x \neq -y$)

$$\frac{\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y}} = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

et (pour $x \notin \{-1; -1/2; -3/2; -3/2 + \sqrt{2}; -3/2 - \sqrt{2}\}$)

$$\frac{1}{2x + \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{4x+4}}}} = \frac{(2x+3)^2}{2(x+1)(4x^2+12x+1)}$$

5 Il suffit de remarquer que sur l'intervalle $[1, 2]$, la fonction $g\colon x \mapsto g(x) = \dfrac{1+2x}{2+x}$ est croissante (sa dérivée est positive) ; il en va de même de $f\colon x \mapsto f(x) = \sqrt{\dfrac{1+2x}{2+x}}$ (comme composée de fonctions croissantes par exemple) ; on a donc

$$f(1) = 1 < f(x) < f(2) \simeq 1.118 < 1,2.$$

6 On obtient (par encadrements, ou par étude de fonction)

$$|x| < 1/2 \iff -1/2 < x < 1/2 \Rightarrow -0.367 < x + 1 - \sqrt{1-x^2} < 0.634.$$

7 Pour $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \frac{1-x^2}{4x}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x}$$

(la seconde égalité nécessitant une manipulation un peu plus fine des radicaux)

Deux multiplications successives par des quantités conjuguées donnent

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})-\sqrt{7}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-\sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})(1-2\sqrt{15})}{(1+2\sqrt{15})(1-2\sqrt{15})}$$
$$= \frac{9\sqrt{3}+5\sqrt{5}+\sqrt{7}-2\sqrt{105}}{59}$$

8 La résolution doit se faire par séparation des cas (en étudiant soigneusement les signes); en optimisant, on n'a que les deux cas $0 \leq x < 7/4$ et $7/4 < x \leq 2$, et on obtient finalement $\sqrt{x+5} > 2\sqrt{x} - \sqrt{2-x} \iff x \in [0, a]$, avec $a = \dfrac{11+2\sqrt{19}}{10} \simeq 1.97178.$

9 Les valeurs «critiques» sont 1, 1/2 et $-1/3$; on construit un tableau d'où on tire 4 inéquations, et finalement

$$\mathcal{S} = [-\sqrt{2/3}, 0] \cup [\sqrt{2/3}, 4/3]$$

10 Le tableau doit être subdivisé pour tenir compte de l'emboîtement des valeurs absolues; les valeurs critiques sont à présent -1, $1/2$, 1, et $1/3$ (qui apparaît quand $\big|x - |1-2x|\big| = |1-3x|$). La solution complète oblige donc à résoudre 5 inéquations du second degré (on peut légérement simplifier ce travail en mettant $|x+1|$ en facteur, mais le gain de temps ne compense pas le risque pris en n'étant pas méthodique) et on obtient finalement

$$\mathcal{S} = [-3, 2-\sqrt{5}].$$

Un exemple de rédaction complète d'un exercice analogue figure dans la fiche d'exercices-types n° 2.

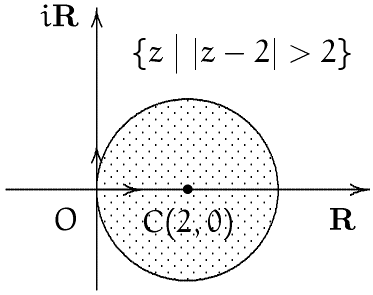
Solutions des exercices (Chapitre 3, Nombres complexes)

1 $1/i = -i$; $\bar{i} = -i$; $1/-i = i$.

2 $z^2 = -9 \iff z \in \{3i, -3i\}$; $z^3 + 4z = 0 \iff z \in \{0, 2i, -2i\}$

3 $i^{1997} = i^{4\times 497+1} = (i^4)^{497} \times i^1 = i$

4 $\dfrac{(1+i)^5 - 1}{(1-i)^5 - 1} = \dfrac{9}{41} + \dfrac{40}{41}i$



5 La «solution» est l'ensemble des points du plan complexe situés à l'extérieur du disque de centre $C(2;0)$ et de rayon 2 (passant donc par l'origine)

6 $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = [1, 2\pi/3]^3 = [1, 2\pi] = [1, 0] = 1$

7 $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} = [\sqrt{2}, \pi/4]^n \Big/ [\sqrt{2}, -\pi/4]^{n-2} = [(\sqrt{2})^{n-(n-2)}, (n-(-(n-2)))\pi/4]$,
et donc $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} = [2, (n-1)\pi/2]$.

8 Pour $a \neq \pi/2 + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, $\dfrac{1 + i.\tan a}{1 - i.\tan a} = \dfrac{\cos a + i \sin a}{\cos a - i \sin a} = \dfrac{[1, a]}{[1, -a]} = [1, 2a]$.

On a $|1 + \cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{2 + 2\cos\varphi}$; posant $\alpha = \varphi/2$, on a $2 + 2\cos\varphi = 4\cos^2\alpha$, donc $|1 + \cos\varphi + i\sin\varphi| = 2|\cos\alpha|$; on montre de même (utiliser les «formules en t») que $\mathrm{Arg}(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi) = \alpha$ si $\cos a > 0$, et $a + \pi$ sinon.

9 Il suffit de remarquer qu'en posant $z = a + bi$ et $z' = c + di$, on a $|z|^2|z'|^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |zz'|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

10 Si $|z| > 2$, on a (inégalité triangulaire) $2 < |z| = |(z+1) - 1| \leq |z+1| + 1$, ce qui montre que $|z+1| > 1$ et par conséquent que $|z^2 + z| = |z(z+1)| = |z||z+1| > 2$

11 $e^{i\pi} = -1$; $e^{-i\pi} = -1$; $e^{4i\pi} = 1$; $e^{i\pi/2} = i$.

12 Si $a \neq 0$, $e^z = a \iff (e^{\Re(z)} = |a|$ et $\cos \mathrm{Im}(z) + i \sin \mathrm{Im}(z) = a/|a|)$. La première condition donne $\Re(z) = \ln|a|$; la seconde définit $\mathrm{Im}(z)$ à 2π près. En définitive, l'équation $e^z = a$ possède une infinité de solutions de la forme $z = z_0 + (2k\pi)i$, ce qui empèche de définir (de manière univoque) le logarithme de a.

13 $\dfrac{e^{it}+1}{e^{it}-1} = \dfrac{e^{it/2}(e^{it/2} + e^{-it/2})}{e^{it/2}(e^{it/2} - e^{-it/2})} = \dfrac{e^{it/2}(2\cos(t/2))}{e^{it/2}(2i\sin(t/2))} = \dfrac{-i}{\tan(t/2)}$ (dans le domaine de définition correspondant : $t \neq k\pi/2$); on pouvait voir immédiatement que le résultat était imaginaire pur, car $\overline{e^{it}} = e^{-it}$, et que donc $\overline{\dfrac{e^{it}+1}{e^{it}-1}} = \dfrac{e^{-it}+1}{e^{-it}-1} = \dfrac{e^{-it}(1+e^{it})}{e^{-it}(1-e^{it})} = -\dfrac{e^{it}+1}{e^{it}-1}$

14 $z^3 = -8 \iff z \in \{-2; 1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$.

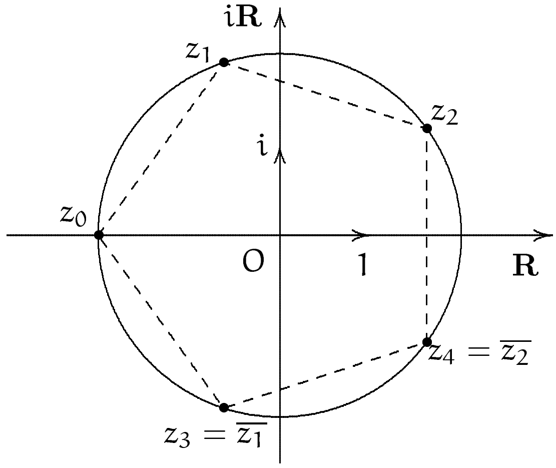
15 On détermine d'abord les racines 6[èmes] de 64; on en déduit alors dans $\mathbf{C}$ la décomposition

$$X^6 - 64 = (X-2)(X+2)\times$$
$$(X-(1+i\sqrt{3}))(X-(1-i\sqrt{3}))(X-(-1+i\sqrt{3}))(X-(-1-i\sqrt{3}))$$

et, dans $\mathbf{R}$,

$$X^6 - 64 = (X-2)(X+2)(X^2-2X+4)(X^2+2X+4).$$

16 $z^5 + 32 = 0 \iff (z+2)(z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 8z + 16) = 0$; pour factoriser ce polynôme, on «parie» sur une décomposition de la forme $z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 8z + 16 = (z^2 + az + 4)(z^2 + bz + 4)$; en identifiant ($a + b = -2$ et $ab + 8 = 4$), on obtient $z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 8z + 16 = (z^2 - (1-\sqrt{5})z + 4)(z^2 - (1+\sqrt{5})z + 4)$. Finir la résolution est élémentaire, mais fait apparaitre des parties imaginaires «compliquées» (on a par exemple $z_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} + i\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$). La théorie trigonométrique montre que les 5 racines ont pour images les sommets d'un pentagone régulier (inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 2).



17 Cet exercice est pratiquement identique à l'exercice-type précédent, en remarquant que $z = -i$ est solution évidente de $(z^2+1)^n = (z+i)^{2n}$, et que si z' est une autre solution, on aura $\left(\dfrac{z'^2+1}{(z'+i)^2}\right)^n = 1$, donc $\dfrac{z'^2+1}{(z'+i)^2} = e^{2k\pi i/n}$; $\dfrac{z'^2+1}{(z'+i)^2}$ valant $\dfrac{z'-i}{z'+i}$, on en déduit que les solutions (outre $-i$) sont les nombres $i\dfrac{1+e^{2k\pi i/n}}{1-e^{2k\pi i/n}}$ ($= 1/\tan(k\pi/n)$ (pour $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$), comme on l'a vu en **13**).

18 $(1-2i)z^2 + (2-3i)z - 13 - 11i = 0 \iff z \in \{1+2i; -\dfrac{13}{5} - \dfrac{11}{5}i\}$.

19 On a d'abord, -1 étant racine «évidente», $z^3 + (2+2i)z^2 + 3iz - 1 + i = (z-i)(z^2 + (1+2i)z - 1 + i)$; résolvant l'équation du second degré, on obtient finalement $z^3 + (2+2i)z^2 + 3iz - 1 + i = (z+1)(z+i)(z+1+i)$ et donc

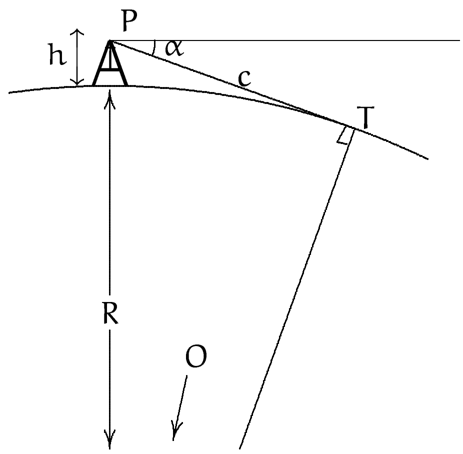
$$z^3 + (2+2i)z^2 + 3iz - 1 + i = 0 \iff z \in \{-1, -i, -1-i\}.$$

20 $z^5 + z^4 - 6z^3 - 6z^2 + 25z + 25 = (z+1)(z^4 - 6z^2 + 25)$; posant $Z = z^2$, on voit que $Z^2 - 6Z + 25 = (Z-3)^2 + 4^2$, et que les solutions de $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$ vérifient $z^2 = 3 + 4i$ ou $z^2 = 3 - 4i$; elles sont donc conjuguées deux à deux, comme le faisait prévoir le théorème de d'Alembert. On obtient finalement la solution

$$z \in \{-1; 1+2i; 1-2i; -1+2i; -1-2i\}.$$

TRIGONOMÉTRIE

21 On voit aisément que le triangle OPT étant rectangle, on a $(R+h)^2 - R^2 = c^2$, et que l'angle α cherché a pour tangente c/R. Les méthodes de calcul approché que nous verrons au chapitre 10 permettent d'en déduire que $c \approx \sqrt{2hR}$ et que $\alpha \approx \sqrt{2h/R}$ (en radians); mais la calculatrice donne (directement) $c \simeq 62\,\text{km}$ et $\alpha \simeq 33'$ (environ un demi-degré).



22 Posons $x = AB$; les triangles BHC et BHA étant rectangles, on doit avoir $HC = \sqrt{2^2 - 1^2}$, et donc $x^2 = 1 + (x - \sqrt{3})^2$, on en déduit que $x = 2/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}/3$.

23 En analysant le triangle isocèle formé par un côté et deux rayons, on obtient $c = 2R\sin(\alpha/2) = 2R\sin(\pi/n)$, où n est le nombre de côtés du polygone régulier. Pour $n = 5$, on a vu en classe (voir aussi **5**) que $\cos(\pi/5) = (1+\sqrt{5})/4$; une analyse soignée de la construction au compas montre que la longueur c du premier côté construit vérifie $c^2 = R^2(5 - \sqrt{5})/2$, ce qui prouve qu'on a bien $c = 2R\sin(\pi/5)$.

24 On obtient (en utilisant trois fois les formules de duplication, et en simplifiant)

$$\tan 8x = \frac{8\tan x - 56\tan^3 x + 56\tan^5 x - 8\tan^7 x}{1 - 28\tan^2 x + 70\tan^4 x - 28\tan^6 x + \tan^8 x}$$

25 La solution trigonométrique équivaut à ($3x = 2x+2k\pi$ ou $3x = -2x+2k'\pi$), soit $x = 2k\pi$ ou $x = 2k'\pi/5$; et donc finalement $\mathcal{S} = \{2k\pi/5\}_{k\in\mathbf{Z}}$. Algébriquement (passant par les formules de duplication et de triplication), on obtient (en posant $X = \cos x$) $4X^3 - 3X = 2X^2 - 1$; et comme on a $4X^3 - 2X^2 - 3X + 1 = (X-1)(4X^2 + 2X - 1)$, on en déduit que $X \in \{1; (-1+\sqrt{5})/4; (-1-\sqrt{5})/4\}$; ce qui prouve (après analyse des signes) que $\cos(2\pi/5) = (-1+\sqrt{5})/4$ (on en déduit que $\cos(\pi/5) = (1+\sqrt{5})/4$, en utilisant l'égalité $2((1+\sqrt{5})/4)^2 - 1 = (-1+\sqrt{5})/4$).

26 Partant de $x = \pi/4$, on a $2(\cos(x/2))^2 - 1 = \cos x = \sqrt{2}/2$, donc $\cos(\pi/8) = \sqrt{1+\sqrt{2}/2}/\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (car $\pi/8$ a un cosinus positif). De proche en proche (comme on le verra au chapitre 5), on obtient $\cos(\pi/16) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, et $\cos(\pi/32) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$. On sait que $\cos^2(\pi/32) + \sin^2(\pi/32) = 1$, on obtient donc $\sin(\pi/32) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$. On peut «deviner» le résultat général :

$$\cos(\pi/2^n) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}} \qquad (n-1 \text{ radicaux}),$$

mais on ne pourra l'énoncer et le prouver rigoureusement qu'après le chapitre 5.

27 La droite ayant pour équation $[Y = t(X+1)]$, elle coupe le cercle unité en $A(-1,0)$ et $B_t(x_t, y_t)$ tel que $x_t^2 + y_t^2 = 1$ et $y_t = t(x_t + 1)$, donc $x_t = (1-t^2)/(1+t^2)$ et

$y_t = 2t/(1-t^2)$. On reconnait les «formules en t» ; posant $x_t = \cos X$ et $y_t = \sin X$, on voit qu'elles seront «démontrées» si on peut prouver que $t = \tan(X/2)$, ce qui est géométriquement «évident» (propriété des triangles inscrits dans un demi-cercle).

On a donc montré que $(1-t^2)^2 + (2t)^2 = (1+t)^2$ (ce qui était évident par simple développement). Réciproquement, supposons qu'on ait une solution entière (x, y, z) de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$, le point B de coordonnées (rationnelles) $((x/z), (y/z))$ sera donc sur le cercle unité, et la pente t de la droite AB sera rationnelle; on voit donc que partant d'un rationnel quelconque, on obtient par cette méthode (due à Diophante, et qui a inspiré à Fermat sa célèbre conjecture) toutes les solutions entières de $x^2 + y^2 = z^2$.

28

$$\sin^5 x = \frac{\sin 5x}{16} - \frac{5\sin 3x}{16} + \frac{5\sin x}{8} \quad ; \quad \cos^2 x \sin^3 x = -\frac{\sin 5x}{16} + \frac{\sin 3x}{16} + \frac{\sin x}{8}$$

29 $\Re\left(\frac{1+it}{1-it}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Remarquant que si l'on pose $t = \sin(x/2)/\cos(x/2)$, on obtient $(1+it)/(1-it) = e^{ix/2}/e^{-ix/2} = e^{ix}$, on en déduit les «formules en t» par identification des parties réelles et imaginaires.

30 Les méthodes de calcul de sommes trigonométriques le donnent, mais il est plus simple de remarquer qu'en posant $z = e^{2i\pi/n}$, on a $S = \mathrm{Im}(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1}) = \mathrm{Im}((z^n - 1)/(z-1)) = 0$.

Solutions des exercices (Chapitre 4, Analyse élémentaire)

1 On a $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;+\infty[$; $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{+\infty} f = 0$ (et donc Ox est asymptote «horizontale»); $\lim\limits_{-1^-} f = \lim\limits_{0^+} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-1^+} f = \lim\limits_{0^-} f = -\infty$ (et donc les droites $[X = -1]$ et Oy sont asymptotes «verticales»). La dérivée $f'(x)$ vaut $(-2x^5 - 4x^3 + x^2 - 1)/(x^4 + x)^2$, c'est-à-dire qu'elle a le signe de $-g(x)$, l'étude de cette fonction nous amène d'abord à étudier $h(x) = 5x^3 + 6x - 1$, dont on voit aisément qu'elle est toujours croissante, et donc qu'elle s'annule en un seul point α compris entre 0 et 1 ($\alpha \simeq 0,16305$). On en déduit que g est croissante sur $]-\infty;0]$, décroissante sur $[0;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$. Or $g(\alpha) \simeq 0,99$; on voit donc que g s'annule en un seul point β compris entre -1 et 0 ($\beta \simeq -0,53754$), ce qui permet enfin de déterminer les variations de f : f est croissante sur $]-\infty;-1[$ (de 0 à $+\infty$), croissante sur $]-1;\beta]$ (de $-\infty$ à $f(\beta) \simeq -2,83879$), décroissante sur $[\beta;0[$ (de $f(\beta)$ à $-\infty$) et décroissante sur $]0;+\infty]$ (de $+\infty$ à 0). f a pour seul maximum (relatif) le point de coordonnées $(\beta, f(\beta))$ et son graphe n'a aucune symétrie (β n'étant pas au milieu des deux valeurs interdites).

2 $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$ est définie pour $x > 0$; comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, on voit que $\lim\limits_{0^+} f = 1$, et il est clair que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. $f'(x) = (1 + \ln x)f(x)$, f est donc décroissante sur $]0;1/e]$ (de 1 à $f(1/e) = e^{-1/e} \simeq 0,6922$), puis croissante sur $[1/e;+\infty[$ (de $f(1/e)$ à $+\infty$). Les méthodes des chapitres 9 et 10 permettront de conclure que le graphe s'approche du point-limite $(0,1)$ en étant tangent à l'axe Oy (car $\lim\limits_{0^+} f' = -\infty$).

De même, $g(x) = x^f(x) = e^{f(x)\ln x}$ est définie pour $x > 0$, et on a $\lim\limits_{0^+} g = 0$ (et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$); $g'(x) = (f(x)/x + f'(x)\ln x)g(x) = (1/x + \ln x + (\ln x)^2)x^x g(x)$, or $1/x + \ln x + (\ln x)^2$ est positif si $x > 1$ (comme somme de termes positifs), et, utilisant la forme canonique, $1/x + \ln x + (\ln x)^2 = (\ln x + 1/2)^2 + 1/x - 1/4$ est également positif si $x < 4$, donc en définitive toujours positif; on en déduit que g est strictement croissante.

3 f a pour période «évidente» 2π, et est impaire; nous allons l'étudier sur $[0;\pi]$. Sa dérivée vaut $\cos x + \cos 2x + \cos 3x$, qu'on peut factoriser par exemple en $f'(x) = (2\cos x + 1)\cos 2x$ (transformation des sommes en produits); on en déduit que f est croissante sur $[0;\pi/4]$ et $[2\pi/3;3\pi/4]$ (et décroissante ailleurs); passant par un maximum ($f(\pi/4) = 2\sqrt{2}/3 + 1/2 \simeq 1,442$), puis par deux extremums très rapprochés (et invisibles sur la calculatrice graphique!) $f(2\pi/3) \simeq 0,433$ et $f(3\pi/4) \simeq 0,443$. Le reste du graphe s'en déduit par symétrie et périodicité.

4 Si on avait $\dfrac{\ln 3}{\ln 2} = \dfrac{p}{q}$, avec p et q entiers, on aurait donc $p\ln 2 = q\ln 3$, donc $2^p = 3^q$, ce qui est absurde, puisque 2^p est pair (si $p > 0$) et 3^q est impair (on voit que ce raisonnement se généralise à $\dfrac{\ln m}{\ln n}$, si $m > n$ n'est pas divisible par n).

5 La fonction $f\colon x \mapsto (\ln x)/x$ (définie sur $]0;+\infty[$) a pour dérivée $(1 - \ln x)/x^2$; elle est donc croissante sur $]0,e]$ (de $-\infty$ à $1/e$) et décroissante sur $[e;+\infty[$ (de $1/e$ à 0). Remarquant que $f(1) = 0$, on en déduit que $f(a) = f(b)$ n'est possible (si $a \neq b$) qu'avec $1 < a < e$ et $b > e$, et que pour a donné entre 1 et e, il y a un b unique supérieur à e tel que $f(a) = f(b)$. Remarquant alors que $a^x = x^a \iff \ln a^x = \ln x^a \iff f(x) = f(a)$, on voit que si $a \leq 1$, l'équation a pour seule solution $x = a$, et si $a > 1$, l'équation a pour solutions $x = a$ et $x = b$ défini comme plus haut. Le seul entier entre 1 et e étant 2, on voit qu'il ne peut y avoir qu'un couple (m, n) au plus tel que $m^n = n^m$; comme $2^4 = 4^2 = 16$, le couple $(2, 4)$ convient.

6 On obtient $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$, $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$ et $\operatorname{th} 2x = 2 \operatorname{th} x/(1 + \operatorname{th}^2 x)$. Posant $t = \operatorname{th}(x/2) = (e^x - 1)/(e^x + 1)$, on obtient

$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}\ ;\ \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \text{ et } \operatorname{th} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

7 Posant $S = 1 + \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} 2x + \operatorname{ch} 3x + \cdots + \operatorname{ch} nx$, on a $S = 1/2((e^0 + e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) + (e^0 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots + e^{-nx}))$; d'après la formule des suites géométriques (en posant par exemple $e^x = X$), on obtient

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1} + \frac{e^{-(n+1)x} - 1}{e^{-x} - 1}\right);$$

qu'on peut simplifier (comme on l'a vu au chapitre 3), obtenant finalement

$$S = \frac{\operatorname{ch}\dfrac{nx}{2}\operatorname{sh}\dfrac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}}$$

8 Par définition, on a $\cos(x + iy) = 1/2(e^{ix-y} + e^{-ix+y})$, x et y étant réels; et donc $\cos(x + iy) = 1/2(e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x))$, soit, en regroupant les parties réelles et imaginaires $\cos(x+iy) = 1/2(\cos x(e^{-y}+e^y)+i \sin x(e^{-y}-e^y)) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$.

9 30π (le «PPCM» des deux périodes, 10π et 6π).

10 Non : $\cos(x^2)$ s'annule pour $x = \sqrt{\pi/2 + k\pi}$, et ces valeurs se rapprochent de plus en plus; $\cos x + \cos x\sqrt{2} = 2\cos(1 + \sqrt{2})x/2 \cos(1 - \sqrt{2})x/2$ s'annule en tous les multiples (entiers) de $(1 + \sqrt{2})\pi$ et de $(1 - \sqrt{2})\pi$; si la fonction $\cos x + \cos x\sqrt{2}$ était T-périodique, on aurait alors $k_1(1 + \sqrt{2})\pi = n_1 T$ et $k_2(1 - \sqrt{2})\pi = n_2 T$, d'où $-3 - 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})/(1 - \sqrt{2}) = n_1/n_2 \in \mathbf{Q}$; $\sqrt{2}$ serait donc rationnel, ce qui est absurde.

11 La formule cherchée est définie pour $x \in [-1; 1]$ (c'est évident pour $\operatorname{Arc}\cos x$, et $|2x^2 - 1| \leq 1 \iff |x| \leq 1$). Supposons d'abord que $x \in [0; 1]$; par définition, $\alpha = \operatorname{Arc}\cos x \in [0; \pi/2]$, et $\cos \alpha = x$. On a donc $\cos 2\alpha = 2(\cos \alpha)^2 - 1 = 2x^2 - 1$; et 2α appartenant à l'intervalle $[0; \pi]$, par définition $2\alpha = \operatorname{Arc}\cos(2x^2 - 1)$. Si x est négatif, on a $\operatorname{Arc}\cos(2x^2 - 1) = \operatorname{Arc}\cos(2(-x)^2 - 1) = 2 \operatorname{Arc}\cos(-x)$; et $\operatorname{Arc}\cos(-x)$ valant $\pi - \operatorname{Arc}\cos x$, on en déduit que l'on a $\operatorname{Arc}\cos(2x^2 - 1) = 2\pi - 2 \operatorname{Arc}\cos x$ sur $[-1; 0]$ (on remarquera que les deux formules concident pour $x = 0$).

12 On a $\tan(a + b) = (\tan a + \tan b)/(1 - \tan a . \tan b)$, donc (en utilisant la relation $\operatorname{tg}(\operatorname{Arc}\operatorname{tg} B)) = B$, qui est vrai quel que soit B) on obtient $\tan A = (2 + 3)/(1 - 6) = -1$. Mais on ne peut en déduire $A = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}(-1) = -\pi/4$ (d'ailleurs, A est clairement positif!); toutefois, on sait que $\tan a = \tan b \Rightarrow a = b + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$; par encadrement, et remarquant que $0 < A < \pi$, on en déduit $A = 3\pi/4$.

13 Rappelons d'abord que $\tan 4x = 2\tan 2x/(1-\tan^2 2x) = (4\tan x - 4\tan^3 x)/(1 - 6\tan^2 x + \tan^4 x)$. Posant $x = \operatorname{Arc\,tg} a$, on en déduit que $\tan 4x = (4a-4a^3)/(1-6a^2+a^4)$, et donc que $4\operatorname{Arc\,tg} a = \operatorname{Arc\,tg}(4a-4a^3)/(1-6a^2+a^4)+k\pi$. De même, $\operatorname{Arc\,tg} a - \operatorname{Arc\,tg} b = \operatorname{Arc\,tg}(a-b)/(1+ab)+k\pi$. Remarquant enfin que $\pi/4 = \operatorname{Arc\,tg} 1$, on aura donc $\pi/4 - 4\operatorname{Arc\,tg}(1/5) = \operatorname{Arc\,tg}(1-b)/(1+b)+k\pi$, avec $b = (4(1/5)-4(1/5)^3)/(1-6(1/5)^2+(1/5)^4) = 120/119$, et après encadrement (montrant que $k = 0$), on obtient la «formule de Machin» (dont on verra au chapitre 10 qu'elle peut permettre un calcul rapide de π avec une grande précision) :

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{239}$$

14 Sur l'intervalle $[0;\sqrt{2}/2]$, on a $2\operatorname{Arc\,sin} x = \operatorname{Arc\,sin} 2x\sqrt{1-x^2}$; sur l'intervalle $[0;1/2]$, on a $3\operatorname{Arc\,cos} x = \operatorname{Arc\,cos}(4x^3-3x)$; enfin sur $[0;1/2]$, on a $3\operatorname{Arc\,sin} x = \operatorname{Arc\,sin}(3x-4x^3)$. Dans les autres intervalles (de $[-1;1]$), ces formules ne sont plus valables, comme un examen rapide des graphes correspondants permet de s'en convaincre ; mais on obtient des formules analogues, de la forme générale $k\operatorname{Arc\,cos} x = \pm\operatorname{Arc\,cos}(P_k(x)) + n\pi$, où P_k est un polynôme de degré k, qu'on appelle le $k^{\text{ème}}$ polynôme de Tchebychev, et qui sera étudié plus précisément au chapitre 5 (les formules correspondantes pour kArcsin ne sont simples que si k est pair).

Solutions des exercices (Interlude, équations différentielles)

Remarque : dans ces solutions, A, B, K et φ désignent des constantes (réelles) arbitraires, y est une abréviation pour $y(x)$.

1 $y' + y = 0 \iff y = Ke^{-x}$; $y'' + y = 0 \iff y = A\cos x + B\sin x$.

2 Si $a > 0$, $y = K\cos(x\sqrt{a} + \varphi)$; si $a < 0$, $y = Ae^{x\sqrt{-a}} + Be^{-x\sqrt{-a}}$; et si $a = 0$, $y'' = 0 \iff y = Ax + B$.

3 Si $a > 1$, $y = Ke^{-x}\cos(x\sqrt{a-1}+\varphi)$; si $a < 1$, $y = Ae^{(-1+\sqrt{1-a})x}+Be^{(-1-\sqrt{1-a})x}$; et si $a = 0$, $y'' + y' = 0 \iff y = Ae^{-x} + B$.

4 $y = -\dfrac{a}{2} + Ae^{x} + Be^{-2x}$

5 $y = -\dfrac{x^3}{5} - \dfrac{12x^2}{25} - \dfrac{176x}{125} - \dfrac{699}{625} + Ae^{x} + Be^{-5x}$

6 $y = -\dfrac{x\cos x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{3} + A\sin x + B\cos x$

7 $y = -\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{6x}{25} - \dfrac{38}{125} + \dfrac{e^{2x}}{9} - \dfrac{7\sin x + 3\cos x}{58} + Ae^{x} + Be^{-2x/5}$

8 $y = -x^2\cos x + 2x\sin x + 4x\cos x - 6\sin x - 6\cos x + Ke^{-x/2}\cos(x\sqrt{3}/2 + \varphi)$

9 $y = -\dfrac{x^3\cos x}{6} + \dfrac{x^2\sin x}{4} + \dfrac{x\cos x}{4} + A\cos x + B\sin x$

10 $y = \dfrac{7xe^{-x}\sin x + 4xe^{-x}\cos x}{65} + \dfrac{244e^{-x}\sin x + 158e^{-x}\cos x}{4225} + Ke^{x}\cos(2x + \varphi)$

Solutions des exercices (Chapitre 5, Techniques combinatoires)

1 Supposons que a et $a+b$ aient un diviseur commun d ($\neq 1$); on aura $a = kd$ et $a+b = k'd$, donc $b = (k'-k)d$, ce qui prouve (contrairement à l'hypothèse) que d est aussi un diviseur de b.

2 On sait que $X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1)$; remplaçant X par 10, on en déduit que $10^n - 1$ est divisible par 9. Comme -1 est racine de $X^{2n+1}+1$ (car $(-1)^{2n+1} = -1$), on voit de même que $X^{2n+1}+1$ est divisible par $X+1$, et donc que $10^{2n+1}+1$ est divisible par 11 (Ces résultats peuvent aussi se démontrer par récurrence).

3 (u_{2n}) est la suite formée des termes de (u_n) d'indices pairs, c'est-à-dire obtenue à partir de (u_n) en prenant un terme sur deux (et en commençant au premier); (u_{2n+1}) est la suite «complémentaire» formée des termes de (u_n) écartés de la première suite.

4 «u_n est le $n^{\text{ème}}$ nombre premier» : oui, mais seulement parce qu'on a prouvé (Euclide) qu'il y avait une infinité de nombres premiers.

«v_n est la $n^{\text{ème}}$ décimale de π» : oui.

«$w = (3, 7, 31, 127, 8191, \ldots)$ est la suite des nombres premiers de la forme $2^k - 1$ (les nombres de Mersenne)» : personne ne le sait ! (c'est un problème ouvert, mais on conjecture que oui; à cette date, on ne connait que les 37 premiers termes de w, et le plus grand est un nombre de plus d'un million de chiffres !)

5 On a $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3/2 = 1,5$, $u_3 = 5/3 = 1,666\ldots$, $u_4 = 8/5 = 1,6$, $u_5 = 13/8 = 1,625$, $u_6 = 21/13 \approx 1,6154$, $u_7 = 34/21 \approx 1,619$, $u_8 = 55/34 \approx 1,6176$ et $u_9 = 89/55 \approx 1,6182$. On voit que la suite u_n semble «osciller», c'es-à-dire que (u_{2n}) est croissante et que (u_{2n+1}) est décroissante (avec $u_{2n} < u_{2n+1}$); ce genre de suite sera étudié systématiquement au chapitre 11.

6 Posons $S = \sum_{k=0}^{n} \cos kx$ et $S' = \sum_{k=0}^{n} \sin kx$ (on remarquera qu'il serait maladroit d'utiliser i comme indice !); on a $S + iS' = \sum_{k=0}^{n} \cos kx + i \sin kx = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$; posant $e^{ix} = z$, on a donc $S + iS' = \sum_{k=0}^{n} z^k = (z^{n+1}-1)/(z-1)$. Le calcul de S continue ensuite comme au chapitre 3.

7 $\sum_{k=0}^{n} v_k = u_{n+1} - u_0$.

8 On a $S = \sum_{\substack{0 \le i \le m \\ 0 \le j \le n}} a^i b^j = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a^i b^j = \sum_{i=0}^{m} \left(a^i \sum_{j=0}^{n} b^j \right) = \left(\sum_{i=0}^{m} a^i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} b^j \right)$.

On obtient (si $a \neq 1$ et $b \neq 1$)

$$S = \frac{(a^{m+1}-1)(b^{n+1}-1)}{(a-1)(b-1)}$$

et si $a = 1$ par exemple, $S = (m+1)(b^{n+1}-1)/(b-1)$.

9 Remarquant que $S = \sum_{0\leq i\leq j\leq n} a^i b^j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a^i b^j = \sum_{j=0}^{n} b^j \sum_{i=0}^{j} a^i$, et donc que $S = \sum_{j=0}^{n} b^j(a^{j+1}-1)/(a-1)$, on voit finalement que

$$S = \frac{a}{a-1}\frac{(ab)^{n+1}-1}{ab-1} - \frac{b^{n+1}-1}{(a-1)(b-1)}$$

si a, b et ab sont différents de 1; les cas particuliers doivent être traités à part; par exemple si $b = 1/a$, on a $S = (n+1)\dfrac{a}{a-1} - \dfrac{b^{n+1}-1}{(a-1)(b-1)}$.

10 Comme plus haut, on a $S = (\sum_{i=0}^{n} i)(\sum_{j=0}^{n} j) = (\sum_{i=0}^{n} i)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. Les termes figurant dans le calcul de S sont les ij avec $i < j$, les i^2 et les ij avec $i > j$; on a donc $S = 2T + \sum_{i=0}^{n} i^2$. Or $T = \sum_{0\leq i<j\leq n} ij = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j-1} ij = \sum_{j=0}^{n} j\sum_{i=0}^{j-1} i = \sum_{j=0}^{n} j((j-1)j/2)$ et donc $2T = \sum_{j=0}^{n}(j^3 - j^2)$; d'où $S = \sum_{j=0}^{n} j^3$ et donc $\sum_{i=0}^{n} i^3 = (\sum_{i=0}^{n} i)^2$.

11 $(x + (1-x))^n = 1$

12 $0 = (1-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k C_{2n}^k$; séparant les termes d'indices pairs ($k = 2k'$) des autres, on aboutit à $\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k+1}$; comme on sait que la somme de tous ces termes ($\sum_{k=0}^{2n} C_n^k$) vaut $(1+1)^{2n} = 2^{2n}$, on en déduit que $\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} = 2^{2n-1}$ (par exemple, pour $n = 2$, on a $1+6+1 = 4+4 = 2^3$).

13 On sait que $C_p^k = p\dfrac{(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!}$; si p est premier, il n'est divisible par aucun des facteurs de $k!$ (si $k < p$); C_p^k étant entier, c'est donc que le numérateur est divisible par $k!$, donc que le quotient $\dfrac{(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!}$ est aussi entier, ce qui prouve que C_p^k est divisible par p. Si p est premier, il ne peut diviser aucun des entiers plus petits que lui, donc pas non plus leur produit (unicité de la décomposition). Réciproquement, supposons d'abord que $p=ab$, avec $a < p$, $b < p$ et $a \neq b$; il est clair que ab divise $(p-1)! = 1\times 2\times\cdots\times a\times\cdots\times b\times\cdots\times(p-1)$. Si p n'est pas premier, on voit aisément que deux tels nombres a et b sont aisés à trouver, sauf si $p = a^2$ est un carré; et dans ce cas, $2a < p \Rightarrow a\times 2a$ divise $p!$, sauf si $p = 4$ (et de fait, 4 ne divise pas $3! = 6$). Pour montrer enfin de même qu'un des C_p^k n'est pas divisible par p, il faut analyser les diviseurs premiers de $p!$, de $(p-k)!$ et de $k!$; et constater que si $k = (p/2)$ (à 1 près), il n'y a plus assez de facteurs premiers de p dans $p!/(k!(p-k)!)$.

14 Pour $n = 1$, $3^{2n} - 2^n = 3^2 - 2 = 7$ est évidemment divisible par 7. Supposons que $3^{2k} - 2^k = 7d$ soit divisible par 7. On aura alors $3^{2(k+1)} - 2^{k+1} = 9.3^{2k} - 2.2^k = 7.3^{2k} + 2(3^{2k} - 2^k) = 7(2d + 3^{2k})$ qui sera aussi divisible par 7; par récurrence, la propriété est donc vraie pour tout n.

15 Il est clair que $u_0 < u_1 = \ln 3$; d'autre part la fonction $f\colon x \mapsto f(x) = \ln(1+2x)$ est croissante (comme composée de fonctions croissantes). Supposons alors que $u_k <$

u_{k+1} ; on aura donc $f(u_k) < f(u_{k+1})$, c'est-à-dire $u_{k+1} < u_{k+2}$. Par récurrence, on voit donc que pour tout n, $u_n < u_{n+1}$, et donc que la suite (u_n) est croissante. Si on utilise la formule de définition $v_{n+1} = \ln(1 + v_n)$, on aura $v_0 > v_1 = \ln 2$; le même argument montre que la suite (v_n) sera alors décroissante.

16 a) : on a $0 < 2^0$ et $1 < 2^1$; supposons (hypothèse de récurrence étendue) que $F_k < 2^k$ et que $F_{k+1} < 2^{k+1}$, on aura alors $F_{k+2} = F_k + F_{k+1} < 2^k + 2^{k+1} < 2^{k+1} + 2^{k+1} = 2^{k+2}$; par récurrence, on voit que $F_n < 2^n$ pour tout n.

b) : quatre termes successifs de la suite F sont de la forme a, b, $a + b$ et $a + 2b$. On a $F_1^2 = 1 = F_2F_0+1$; supposons (hypothèse de récurrence) que $F_k^2 = F_{k-1}F_{k+1} + (-1)^{k+1}$; on aura donc (avec les notations précédentes) $b^2 = a(a + b) + (-1)^{k+1}$ et $F_{k+1}^2 - F_kF_{k+2} = (a+b)^2 - b(a+2b) = a^2 + ab - b^2 = (-1)^{k+2}$, ce qui prouve par récurrence que $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}$ (pour tout n).

c) : la rédaction de ces preuves est assez fastidieuse, faute d'une notation appropriée pour les restes de division par k (la théorie *modulaire*); mais le principe consiste à remarquer que ces restes suivent aussi une «loi de Fibonacci» (par exemple, si deux termes ont pour restes respectifs 2 et 3 dans la division par 5, le terme suivant sera divisible par 5...).

17 Il s'agit en fait d'une récurrence étendue (de la forme : «supposons que pour tout $k' \leq k$, on ait $\mathcal{P}(k')$»); cela dit, l'erreur réside dans le fait que la propriété est utilisée pour $k' = 0$ (quand on veut passer de $k = 1$ à $k = 2$), alors qu'on ne l'a vérifiée qu'à partir de $k = 1$.

18 Là, l'erreur est plus cachée : les arguments sont tous corrects, sauf pour $k = 2$ (ce qui, bien sûr, fait (heureusement) s'effondrer le raisonnement), car alors, il n'y a pas de nombre supplémentaire («l'un des $k - 1$ entiers non remplacés») disponible !

POLYNÔMES

19 On peut remarquer qu'une fonction périodique est bornée, ou que $P(x) - P(0)$ aurait une infinité de racines.

20 On a

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^{n-k}(1-X)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^{n-k} \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-1)^i X^i \\ &= \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} C_n^k C_k^i (-1)^i X^{n+i-k}. \end{aligned}$$

Regroupant les termes, on voit que le coefficient a_p de X^p vaut $\sum_{n+i-k=p} C_n^k C_k^i (-1)^i$; or (d'après la formule du binôme) $P(X) = (X+(1-X))^n = 1$, par conséquent $a_0 = 1$ et $a_p = 0$ pour $p > 0$. Posant $p = n - m$, on obtient $a_{n-m} = \sum_{\substack{k-i=m \\ k \leq n}} C_n^k C_k^i (-1)^i$,

et après changement d'indice

$$a_{n-m} = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k C_{m+k}^k C_n^{m+k} = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

21 Un calcul soigné du terme $a_p X^p$ de $Q_n(X) = (P_n(X))^2 - P_n(2X)$ donne

$$a_p = -\frac{2^p}{p!} + \sum_{\substack{i+j=p \\ 0 \leq i,j \leq n}} \frac{1}{i!j!}$$

Or on sait que la somme des coefficients binomiaux $\sum_{i=0}^{p} C_p^i$ est égale à 2^p ; si $i+j = p$, on peut écrire $C_p^i = p!/(i!j!)$, et on voit alors que si $p \leq n$, on aura $a_p = -2^p/p! + \sum_{i+j=p} C_p^i/p! = 0$; le premier terme (éventuellement) non nul de $Q_n(X)$ est donc $a_{n+1}X^{n+1}$, ce qui prouve que $Q_n(X)$ est divisible par X^{n+1}

22 On obtient (en passant par $\mathbf{C}$ et en regroupant les facteurs conjugués)

$$X^3 + X - 2 = (X-1)(X^2+X+2) \ \text{(dans } \mathbf{R}\text{)} = (X-1)(X + \frac{1-i\sqrt{7}}{2})(X + \frac{1+i\sqrt{7}}{2}) \ \text{(dans } \mathbf{C}\text{)}$$

$$\begin{aligned} X^6 - 1 &= (X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1) \ \text{(dans } \mathbf{R}\text{)} \\ &= (X-1)(X+1)(X + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2})(X + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2})(X - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2})(X - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}) \\ X^6 + 64 &= (X^2+4)(X^2+2X\sqrt{3}+4)(X^2-2X\sqrt{3}+4) \ \text{(dans } \mathbf{R}\text{)} \\ &= (X-2i)(X+2i)(X-\sqrt{3}-i)(X-\sqrt{3}+i)(X+\sqrt{3}-i)(X+\sqrt{3}+i) \ \text{(dans } \mathbf{C}\text{)} \\ X^5 - 1 &= (X-1)(X^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}X + 1)(X^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}X + 1) \ \text{(dans } \mathbf{R}\text{)} \\ &= (X-1)(X-e^{2i\pi/5})(X-e^{4i\pi/5})(X-e^{6i\pi/5})(X-e^{8i\pi/5}) \ \text{(dans } \mathbf{C}\text{)} \end{aligned}$$

23 (-1) sera racine si $(-1)^{n^2} - 2(-1)^{2n} + 1 = 0$, c'est-à-dire si$(-1)^{n^2} = 1$, et donc si n est pair. Pour que (-1) soit racine double, il faut que $P'(-1) = n^2(-1)^{n^2-1} -$

$4n(-1)^{2n-1}$ soit nul; comme on a supposé n pair, cela équivaut à $n^2 = 4n$; outre le polynôme nul, on obtient le polynôme $X^{16} - 2X^8 + 1$.

24 Pour que X^n+X+1 soit divisible par $X^2+X+1 = (X-j)(X-j^2)$, il faut (et il suffit) que j et j^2 soient racines de X^n+X+1 ; j et j^2 étant conjugués, il suffit donc d'avoir $j^n + j + 1 = 0 = j^2 + j + 1$, donc que $n = 3k + 2$.

25 On sait que $X^n = A$ a pour solutions les $a_k = ae^{2ik\pi/n}$, où $a = a_0$ est une des racines $n^{\text{ème}}$ de A ($|a| = |A|^{1/n}$ et $\operatorname{Arg}(a) = \operatorname{Arg}(A)/n$). On peut donc factoriser $X^n - A = \prod_{k=0}^{n-1}(X - a_k) = \prod_{k=0}^{n-1}(X - ae^{2ik\pi/n})$, et d'après le cours, la somme des a_k est nulle (ce qu'on a déjà vu au chapitre 3) et le produit des a_k vaut $(-1)^{n-1}A$ (ce qui est assez clair, si l'on remarque que ce produit vaut $a^n e^s$, avec $s = (2i\pi/n)\sum_{k=0}^{n-1} k = (2i\pi/n).n(n-1)/2\ldots$)

26 Soit (x, y, z) une solution du système; développons le polynôme $(X-x)(X-y)(X-z)$. On obtient $X^3-(x+y+z)X^2+(xy+yz+xz)X-xyz$. Or on sait que $xy+yz+zz = xyz(1/x + 1/y + 1/z)$; on en déduit que ce polynôme vaut $X^3 - 2X^2 - 5X + 6$. On sait que la factorisation est unique à l'ordre des facteurs près; X^3-X^2-2 valant $(X - 1)(X + 2)(X - 3)$, on en déduit que les solutions du système sont $(1; -2; 3)$, $(-2; 1; 3)$, ...

27 S'il y avait deux tels polynômes P et Q, le polynôme $P(X) - Q(X)$ serait de degré $\leq n$, et posséderait $n + 1$ racines distinctes. On a $Q(x_i) = \sum_{k=0}^{n} K_k \prod_{j\neq k}(x_i - x_j)$ (remarquer le changement d'indexation); on voit que si $k \neq i$, le terme $\prod_{j\neq k}(x_i - x_j)$ sera nul, ce qui montre que $Q(x_i) = K_i \prod_{j\neq i}(x_i-x_j)$. Posons alors $K_i = i/\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)$; on voit que le polynôme Q ainsi obtenu est de degré $\leq n$, et vérifie $Q(x_k) = k$ pour tout k.

28 Par récurrence, on voit que le degré de P_n est 2^{n-1}; on a $P_1 = X$; $P_2 = X^2 + X = X(X + 1)$ et $P_3 = X^4 + 2X^3 + X^2 + X = X(X - \alpha)(X - \beta)(X - \overline{\beta})$, où $\alpha \simeq -1,754877666$, et où β (complexe) $\simeq -0,122561167 + 0,744861767i$. Remarquons à présent que $|x^2 + x| = |x||x + 1| \leq |x|(|x| - 1)$ d'après l'inégalité triangulaire, ce qui prouve que $|x| > 2 \Rightarrow |x^2 + x| > 2$ (cette formule étant également vraie dans $\mathbf{C}$, ce qui suit est valable pour le module des racines complexes de P_n, mais la démonstration est légérement plus élaborée). Supposons alors que $x < -2$; il est clair que $P_2(x) = x^2 + x = x(x + 1) > 2$, et que $P_2(x) > |x|$. Montrons alors par récurrence que la suite $P_n(x)$ est croissante : $P_{k+1}(x) = (P_k(x))^2 + x$, et donc $P_{k+1}(x) - P_k(x) = P_k(x)(P_k(x) - 1) + x > P_k(x) + x > 0$. On voit donc que cette suite ne s'annule jamais, ce qui prouve que x n'est pas racine de P_n.

Solutions des exercices (Chapitre 6, Le langage des fonctions)

1 $[x \mapsto x^3](\mathbf{R} \to \mathbf{R})$ est bijective (voir le chapitre 4), donc injective et surjective. $g\colon x \mapsto x^3(\mathbf{C} \to \mathbf{C})$ est surjective mais pas injective, puisque l'équation $x^3 = A$ possède (si $A \neq 0$) trois solutions distinctes dans $\mathbf{C}$.

2 Si $x \in A$ et $x \in B$, on a (par définition) $f(x) \in f(A)$ et $f(x) \in f(B)$, ce qui prouve que $f(x) \in f(A) \cap f(B)$, et donc que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$; réciproquement, si $y \in f(A) \cap f(B)$, c'est donc que $y = f(x) = f(x')$ avec $x \in A$ et $x' \in B$, mais on voit bien qu'à moins d'avoir f injective (sur $A \cup B$), on ne pourra pas conclure; un contre-exemple est $f : x \mapsto x^2$; $A = [-1, 2]$, $B = [-2, 1]$; on a $f(A \cap B) = f([-1, 1]) = [0, 1]$, mais $f(A) = f(B) = f(A) \cap f(B) = [0; 4]$.

De même, si $x \in A \cup B$, $f(x) \in f(A)$ ou $f(x) \in f(B)$, ce qui montre que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. Réciproquement, si $y \in f(A) \cup f(B)$, c'est donc que $y = f(x)$ ou que $y = f(x')$ avec $x \in A$ et $x' \in B$; cette fois, on peut conclure et on aura bien l'égalité.

3 Si $g \circ f : A \to C$ est bijective, cela veut dire que tout élément z de C est atteint, donc qu'il existe $x \in A$ tel que $g(f(x)) = z$, mais alors $z = g(y)$ avec $y = f(x)$, ce qui prouve que g est surjective. Supposons que f ne soit pas injective, il existerait alors x_1 et x_2 distincts tels que $f(x_1) = f(x_2) = y$; mais alors, on aurait $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) = g(y)$ et $g \circ f$ ne serait pas non plus injective, ce qui est absurde.

4 Réciproquement, la composée d'une injection et d'une surjection n'est pas bijective en général (le seul résultat de ce genre est que la composée de deux injections est injective, et que la composée de deux surjections est surjective); montrons-le à l'aide d'un contre-exemple : $f : x \mapsto e^x$ est injective (de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$), et $g : x \mapsto x^3 - x$ est surjective, mais $h = g \circ f : x \mapsto e^{x^3-x}$ n'est ni surjective ($\mathrm{Im}(h) \subset \mathbf{R}^+$), ni injective ($h(0) = h(1) = 1$).

5 Pour que $p_a(f)$ existe, il faut que $f(a)$ existe, c'est-à-dire que $a \in D_f$; autrement dit, le domaine de p_a est le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé des fonctions définies en a. L'image de p_a est évidemment $\mathbf{R}$, car elle en est un sous-ensemble, et tous les réels sont atteints, puisque par exemple $p_a([x \mapsto x + b - a]) = b$. La restriction de p_a à $\mathcal{A}$ esst une application (puisque toutes les fonctions de $\mathcal{A}$ sont définies en a); la remarque précédente montre que c'est une surjection. L'application $a \mapsto p_a$, dont l'ensemble de départ est $\mathbf{R}$ et l'ensemble d'arrivée est l'ensemble des fonctionnelles, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}$ vers $\mathbf{R}$, est une injection; en effet, si on avait $p_a = p_b$ avec $a \neq b$, on aurait en particulier $p_a([x \mapsto x]) = p_b([x \mapsto x]) = a = b$, ce qui est absurde.

6 «M est un majorant de A et de B» est évidemment équivalent à «M est un majorant de $A \cup B$», ce qui prouve que $\max(\sup(A), \sup(B)) = \sup(A \cup B)$. Par contre, soit m un majorant de A ou de B, il est seulement clair que m sera dans les deux cas un majorant de $A \cap B$, ce qui montre que $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B)$; l'égalité n'est pas vraie en général, comme le montre le contre-exemple $A = \{1\} \cup [2, 3]$ et $B = \{1\} \cup [4, 5]$.

7 a) Oui. b) Non (il faut que f et g soient positives)

8 Un exemple est l'application f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1 \\ f(x) = 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

9 Montrons par récurrence que $u_n \leq x_0$: en effet, $x_0 > 0$ par définition et la propriété est donc vraie de u_0 ; si on suppose $u_k \leq x_0$, on en déduit $f(u_k) \leq f(x_0) = x_0$. La suite u_n est donc majorée par u_0, ce qui, d'après le théorème de la borne supérieure, montre que $\sup(u_n) = L$ existe et que $L \leq x_0$.

On verra au chapitre 11 que si f est continue en L, on peut montrer que $f(L) = L(= x_0)$. On sait déjà que f(L) est un majorant de u_n (même argument par récurrence que ci-dessus) et donc que $L \leq f(L) \leq x_0$. Mais il est possible de construire un contre-exemple à l'égalité : prendre par exemple pour $f : x \mapsto f(x) = 1 + x/2$ si $x < 2$ et $x \mapsto f(x) = 2 + x/2$ si $x \geq 2$; on peut alors montrer (voir le chapitre 11) que $L = 2$ (et donc $L < f(L) = 3$) ; dans cet exemple, $x_0 = 4$.