Sujets de l'Oral blanc (2000)

Les conditions étaient : 20 mn de préparation ; 20 mn d'oral.

Ces sujets correspondent à l'ensemble du programme d'Analyse, sauf les équations différentielles (les chapitres 4 à 13 du cours) ; dans la plupart des cas, la question de cours « amorce » l'exercice, et il vaut mieux la maîtriser pour pouvoir résoudre ce dernier.

Les énoncés ont été donnés sous la forme exacte reproduite ici (mais sous forme manuscrite) ; il était évidemment possible de demander des éclaircissements sur telle ou telle notation, et il serait regrettable que certains candidats ne s'en soient préoccupés qu'au moment du passage au tableau...

Une solution succinte (la « réponse ») et des indications de méthode et d'attitude à l'oral sont proposées dans la deuxième partie de ce document

---

1

Question de cours

Racines cubiques de l'unité. Interprétation géométrique d'un complexe (ponctuelle et vectorielle)

Exercice

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Soit (A, B, C) trois points distincts deux à deux d'affixes respectives a, b, c. Interpréter $\dfrac{AC}{AB}$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.

b) Application : $a = 1 + i$, $b = 2$; déterminer c pour que ABC soit équilatéral.

c) Montrer que ABC équilatéral $\Rightarrow aj^2 + bj + c = 0$ ou $a\bar{j}^2 + b\bar{j} + c = 0$. Étudier la réciproque.

d) Montrer : ABC équilatéral $\iff a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

2

Question de cours

Bijection. Bijection réciproque. Définition d'un DL. Principaux DL.

Exercice

Soit $f : [-1, +\infty[\to [2, +\infty[\,/\, \forall x \in [-1, +\infty[,\ f(x) = (x^2 + 2x + 5)^{1/2}$.

a) Montrer que f est une application.

b) Montrer que f est bijective et exprimer $f^{-1}(y)$ (on n'étudiera pas f).

c) Étudier f et tracer $\mathcal{G}_f$ (on précisera l'asymptote).

d) Calculer $\int_0^x (t^2 + 2t + 5)^{1/2} dt$, $x \in \mathbf{R}$.

3

Question de cours

Définition de la bijection et de la bijection réciproque. Formule du changement de variable

Exercice

Soit $\varphi : x \in \,]-1,+\infty[\, \mapsto \varphi(x) = \left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{1/2} \in \,]1,+\infty[$.

a) Montrer directement que φ est une bijection de $]-1,+\infty[$ sur $]1,+\infty[$. Exprimer $x = \varphi^{-1}(t)$.

b) Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\frac{u+3}{u+1}\right)^{1/2} du$, $x \in \,]-1,+\infty[$. Calculer $F(x)$ en utilisant le changement de variable $t = \varphi(u)$ ($u \in \,]-1,+\infty[$). On utilisera ensuite une intégration par parties.

c) Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $\varphi(x) - 1$.

---

3 a

(Variante proposée en 1997)

Question de cours

Définition d'une bijection et de la bijection réciproque.

Exercice

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^* \,/\, \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

a) Justifier pourquoi f est effectivement une application.

b) Démontrer directement que f est une bijection et exprimer $f^{-1}(y)$.

c) Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, \forall t \in \mathbf{R},\ g(t) = \operatorname{sh} t$. Simplifier $f \circ g(t)$. Retrouver alors le fait que f est bijective.

d) Calculer $\int_0^x f(u)\, du$.

4

Question de cours

Définition d'une bijection et de la bijection réciproque. Définition d'une fonction dérivable. Dérivabilité de la bijection réciproque.

Exercice

Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+ \,/\, \forall x \in \mathbf{R}_+,\ f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$.

a) Montrer à l'aide de la définition que f est bijective et exprimer $f^{-1}(y)$.

b) Montrer que f est dérivable. Est-elle $\mathcal{C}^2$? Montrer que f^{-1} est aussi dérivable.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, puis $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x^n}{1+\sqrt{x}}\right) dx$, $n \in \mathbf{N}$ (commencer par poser $x = t^2$ et rechercher une décomposition).

---

4 a

(Variante proposée en 1996)

Question de cours

Définition d'une bijection et de la bijection réciproque.

Exercice

Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+ \,/\, \forall x \in \mathbf{R}_+,\ f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$.

a) Justifier pourquoi f est effectivement une application. f est-elle dérivable ?

b) Démontrer à l'aide de la définition que f est bijective et exprimer $f^{-1}(x)$.

c) Calculer $\int_0^x f(t)\,dt$, puis $\int_0^x (f(t))^2\,dt$, $x \geq 0$.

5

Question de cours

Définition de Arc sin, Arc cos, Arc tan. Définition d'une asymptote en $+\infty$

Exercice

a) Montrer que $\theta : x \in \mathbf{R}_+^* \mapsto \theta(x) = \operatorname{Arc\,tan} x + \operatorname{Arc\,tan} \dfrac{1}{x}$ est constante :
1) en calculant $\theta'(x)$; 2) en calculant $\cos(\theta(x))$.

b) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x \operatorname{Arc\,tan} x$. Étudier f, préciser l'asymptote en $+\infty$, Δ, et la position de la courbe $\mathcal{G}_f \,/\, \Delta$.

c) Calculer $\int_0^x f(t)\,dt$.

6

Question de cours

Énoncé précis de la méthode du raisonnement par récurrence (simple et cumulative).

Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite réelle $/ \, u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \dfrac{n}{2(n+1)} u_{n-1} + 1$.

a) Si l'on **suppose** u convergente, de limite ℓ, prouver que $\ell = 2$.

b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq \dfrac{2n+4}{n+3}$.

c) Déduire de b) que (u_n) converge.

d) Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2^n(n+1)} \left(\sum_{k=0}^{n} (k+1)2^k \right)$. En déduire un équivalent de $\sum_{k=0}^{n} (k+1)2^k$.

---

6 a *(Variante proposée en 1997)*

Question de cours

Énoncé précis de la méthode du raisonnement par récurrence :
récurrence simple et récurrence cumulative.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite telle que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \dfrac{n}{2n+1} u_{n-1} + 1$.

a) On suppose u convergente vers ℓ. Calculer ℓ.

b) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $u_n \leq \dfrac{2n+3}{n+2}$.

c) En déduire que u converge.

d) Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(2k+1)!}{2^k (k!)^2} \right)$.

7

Question de cours

Énoncé précis de la méthode du raisonnement par récurrence.

Définitions et propriétés des coefficients $\binom{n}{p}$; formule du binôme

Exercice

a) Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$, $n \in \mathbf{N}^*$: 1) par récurrence

2) directement, en utilisant le changement d'indice $k = n - k'$

b) On pose $S(x) = (1+x)^n$. Calculer $S'(x)$ de deux manières différentes.

c) Utiliser b) pour retrouver a) et calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$.

8

Question de cours

Énoncé du raisonnement par récurrence. Formule du binôme. Définition de la divisibilité dans $\mathbf{Z}$

Exercice

Si $n \in \mathbf{N}$, on pose $A_n = 5^{6n} - 2^{3n}$

a) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que 7 divise A_n

b) En remarquant que $5 = 7 - 2$, démontrer directement le résultat pour $n \in \mathbf{N}^*$

c) Justifier : $a^n - b^n = (a-b)(\sum\limits_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}b^i)$, $n \in \mathbf{N}^*$. Retrouver alors le fait que 7 divise A_n

---

9

Question de cours

Suites récurrentes de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Raisonnement par récurrence. Formules de Moivre et d'Euler.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 2\cos\theta$, et
$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = (2\cos\theta)u_{n+1} - u_n$, θ étant donné dans $]0, \pi[$.

a) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.

b) Retrouver le résultat de a) par une autre méthode.

c) Montrer qu'il existe un polynôme $P_n \,/\, \forall n \in \mathbf{N},\ P_n(\cos\theta) = u_n$ (on pourra utiliser les formules d'Euler et Moivre).

10

Question de cours

Théorème de convergence d'une suite monotone. Lecture graphique des valeurs d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$, u_0 donné.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \,/\, u_0 \in\,]0, 1[$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \left(\dfrac{1+u_n}{2}\right)^{1/2}$.

a) À l'aide d'un graphique, constater que la suite est monotone.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n \in\,]0, 1[$, puis que la suite (u_n) est croissante.

c) Montrer que u converge et préciser $\ell = \lim u_n$.

d) On pose $\theta_n = \operatorname{Arc}\cos u_n$. Calculer θ_n en fonction de θ_0 et n.
En déduire $\ell - u_n \sim \dfrac{(\operatorname{Arc}\cos u_0)^2}{2^{2n-1}}$.

11

Question de cours

Énoncé de la formule de Leibnitz. Énoncé de la formule de Taylor-Young. Définition d'un développement limité d'ordre n.

Exercice

Soit, pour $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction $f_n \,/\, \forall x \in \,]-1,+\infty[\, / \, f_n(x) = x^{n-1}\ln(1+x)$.

a) En utilisant la formule de Leibnitz, montrer que $\forall x \in \,]-1,+\infty[\, - \{0\}$,
$$f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}(1-(1+x)^{-n}).$$

b) En remarquant que f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$, exprimer $f_n^{(n)}(0)$.

c) Donner un développement limité d'ordre $j \in \mathbf{N}^*$, de $x \mapsto \ln(1+x)$, en 0. En déduire le DL_{n-1+j} en 0 de f_n.

d) Utiliser c) pour exprimer $f_n^{(k)}(0)$, $k \in \mathbf{N}$.

12

(Énoncé proposée en 1997)

Question de cours

Théorème de la dérivabilité d'une fonction composée. Définition de $\int_a^b f(t)\,dt$.

Exercice

Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, continue, telle que $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(1/x) = x^2 f(x)$.

a) On pose $F = x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{1/x} f(t)\,dt$, $x \in \mathbf{R}_+^*$.
   1) Justifier, avec soin, la dérivabilité de F.
   2) Prouver que F est constante.

b) *Application*
Soit $h : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R} \,/\, h(x) = x\mathrm{Arc}\tan x$. Étudier les variations de h et préciser l'asymptote. Calculer $\int_0^x h(u)\,du$.

---

12 a

(Variante proposée en 1996)

Question de cours

Théorème de la dérivabilité d'une fonction composée.

Exercice

Soit, pour $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \mathrm{Arc}\sin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \mathrm{Arc}\cos\sqrt{t}\,dt$.

a) Justifier pourquoi f est continue, puis dérivable.

b) Montrer que f est π-périodique, et comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [\![0,\pi/2]\!]$. En déduire $f(x)$.

c) Montrer que $\forall u \in [0,1]$, $\operatorname{Arc}\cos\sqrt{1-u^2} = \operatorname{Arc}\sin u + C$, C constante.

d) En déduire que $f(x) = \int_0^1 \operatorname{Arc}\sin\sqrt{t}\,dt$, et retrouver le résultat de b).

13

Question de cours

Les trois formules de Taylor. Définition de deux suites équivalentes.

Exercice

a) Soit $f : t \mapsto \ln(1+t)$; appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, puis 2, à cette fonction et aux bornes $a = 0$, $b = x$, $x > 0$.

b) On pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n^2})$, $n \in \mathbf{N}^*$. Écrire différemment u_n.

c) En utilisant a), montrer que $u_n = e^{a_n - b_n}$, avec $a_n \to 1/2$ et $b_n \to 0$. Conclure.

d) Déterminer un équivalent de $L - u_n$, $L = \lim u_n$.

14

Question de cours

Définition d'une intégrale. Formules «en t». Règle de Bioche.

Exercice

a) Démontrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\cos t} = \ln(\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}))$, $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

b) On pose $y = \ln(\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}))$. Montrer :

$$1)\ \operatorname{th}\frac{y}{2} = \tan\frac{x}{2}$$

$$2)\ \operatorname{th} y = \sin x$$

$$3)\ \operatorname{ch} y = \frac{1}{\cos x}.$$

15

Question de cours

Formules de Taylor : Young, Lagrange et reste intégral.

Exercice

Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à $u \mapsto \sin u$, à l'ordre 1, pour les bornes 0 et x.

b) Transformer u_n, et montrer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1/2$.

c) Retouver le résultat de b) en transformant la somme $\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2}$ (poser $\theta = 1/n^2$).

16

Question de cours

Définition d'un DL en 0. Principaux DL. Forme canonique. Changement de variable dans une intégrale.

Exercice

a) Calculer $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x - x^2/2}{x(x - \operatorname{sh} x)}$

b) Calculer $\int_1^x \frac{dt}{t(2t - t^2)^{1/2}}$, $x \in]0, 2[$. (Questions indépendantes)

17

Question de cours

Définition d'un DL à l'ordre n en 0. Dérivée d'une fonction composée.
Développement limité d'une fonction composée.

Exercice

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \operatorname{Arc}\tan(e^x)$.

a) Justifier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.

b) Montrer que pour $x > 0$, $\operatorname{Arc}\tan x + \operatorname{Arc}\tan \frac{1}{x}$ est constant.

c) Déduire de b) que $\frac{\pi}{2} - f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$.

d) Donner un DL_3 en 0 de f.

e) Calculer $\int_0^x e^{2t} f(t)\, dt$.

17 a *(Variante proposée en 1997)*

Question de cours

Définition d'une fonction admettant un développement limité à l'ordre n.
Développement d'une fonction composée.

Exercice

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{Arc}\tan(\sin x)$.

a) Sans chercher à simplifier f, donner un développement limité à l'ordre 3 de f, en 0.

b) Étudier la parité de f, sa dérivabilité. Comparer $f(x)$ et $f(\pi - x)$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{G}_f$, la représentation graphique de f ? Calculer $\cos(f(x))$ et $\sin(f(x))$.

c) Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{Arc}\tan(\sin x)\, dx$.

18

Question de cours

Définition d'une suite croissante, décroissante, minorée. Inégalité des accroissements finis

Exercice

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \,/\, u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}$.

a) Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, \forall x \in \mathbf{R}$, $g(x) = e^{-x} - x$. Montrer, en étudiant g, que g est une bijection. En déduire $\exists! \ell \in \mathbf{R}$, $e^{\ell} = \ell$.

b) Montrer que $\ell \in \left]1/e, 1\right[$. Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [1/e, 1]$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $|u_n - \ell| \le e^{-1/e}|u_{n-1} - \ell|$. En déduire la convergence de (u_n).

19

Question de cours

Théorème de convergence d'une suite monotone. Définition d'une intégrale. Théorème des accroissements finis

Exercice

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle $/\, \forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} 1/k$.

a) Montrer que (u_n) est croissante et majorée par 1. Conclure.

b) Montrer que $\forall k \in \mathbf{N},\ k \geq 2,\ \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.

c) Déduire de b) que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

d) Retrouver directement c) en utilisant un théorème précis du cours sur l'intégrale.

20

Question de cours

Sens de variation d'une suite. Théorème de convergence d'une suite monotone, théorème des gendarmes.

Exercice

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite telle que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} 1/k^2$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq 1/n$. Conclure.

b) Montrer que u est décroissante.

c) Montrer que $\forall k \in \mathbf{N},\ k \geq 2,\ \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$.

d) Utiliser c) pour trouver un équivalent de u_n.

21

Question de cours

Définition de la continuité en un point, de la dérivabilité. Théorème d'intégration d'un DL.

Exercice

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,/\, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} x/(e^x - 1) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

a) Montrer à l'aide de la définition que : 1) f est continue en 0; 2) f est dérivable en 0.

b) Étudier f et tracer $\mathcal{G}_f$ (on précisera l'asymptote)

c) Donner un DL_4 en 0 de $\int_0^x f(t)\,dt$ (on ne cherchera pas à calculer l'intégrale)

22

Question de cours

Définition d'une intégrale; énoncé précis relatif à la dérivation d'une fonction composée. Théorème des accroissements finis.

Exercice

Soit $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{1 + (\ln t)^2}$, $x \in \,]0, +\infty[$.

a) Justifier la dérivabilité de F et calculer $F'(x)$. Variations de F ?

b) En utilisant le théorème des accroissements finis et la croissance fonctionnelle, montrer que $F(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{x}{(\ln x)^2}$ et $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{(\ln x)^2}$.

c) Montrer que F admet un prolongement continu en 0, et que ce prolongement est dérivable.

d) Que peut-on dire de la branche infinie de $\mathcal{G}_F$, la représentation graphique de F ?

23

Question de cours

Définition de l'intégrale. Changement de variable. Intégration des inégalités

Exercice

Soit $I_n = \displaystyle\int_1^e t^2 (\ln t)^n \, dt$, $n \in \mathbf{N}$.

a) Calculer I_0, I_1.

b) Montrer, à l'aide d'un changement de variable, que $I_n = \int_0^1 t^n e^{3t} \, dt$.

c) Utiliser b) pour montrer que $0 \leq I_n \leq \dfrac{e^3}{n+1}$. Conclusion ?

d) Relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} n I_n$.

24

Question de cours

Intégration des inégalités. Intégration par parties.
Formule du changement de variable.

Exercice

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan t)^{2n} dt$, $n \in \mathbf{N}$.

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^2} \, du$ en utilisant un changement de variable «naturel». En déduire $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{2n+1}$. Conclusion ?

c) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}. Calculer I_n.

1

Question de cours

On dit que $z \in \mathbf{C}$ est une racine cubique de l'unité si $z^3 = 1$. Cette équation admet les trois solutions 1, j et j^2, avec $j = e^{2i\pi/3} = (-1 + i\sqrt{3})/2$, et $j^2 = e^{4i\pi/3} = \bar{j}$ (il faut savoir le redémontrer, mais il suffisait probablement ici de faire remarquer que $z^3 - 1 = 0 \iff (z-1)(z^2+z+1) = 0$. De même, il n'était sans doute pas nécessaire de donner la liste de toutes les propriétés utiles de j, telles que $1 + j + j^2 = 0$, ou de parler du triangle équilatéral formé par leurs images; mais cela ne peut pas faire de mal, si c'est fait brièvement). On appelle *image* (ponctuelle) d'un complexe $z = a + ib$ le point M de coordonnées (a, b) (dans un repère orthonormé $(O, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ fixé), et *image vectorielle* de z le vecteur $\overrightarrow{OM} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$. Réciproquement, z s'appelle l'affixe de M (ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$).

Exercice

a) Notant z_A l'affixe du point A, et $z_\mathbf{v}$ l'affixe du vecteur $\mathbf{v}$, on sait que $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$, et que $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$; on aura donc $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{|c-a|}{|b-a|}$. D'autre part, on sait que l'argument de z_M est égal à l'angle $(\widehat{Ox, \overrightarrow{OM}})$, et que $\text{Arg}(z_2/z_1) = \text{Arg}(z_2) - \text{Arg}(z_1)$ (à $2k\pi$ près); on en déduit (à l'aide de la relation de Chasles pour les angles) que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \text{Arg}(c-a) - \text{Arg}(b-a)$. Posant $Z = \frac{c-a}{b-a}$, on peut aussi remarquer que $\dfrac{AC}{AB} = |Z|$, et que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \text{Arg}(Z)$.

b) En particulier, pour que le triangle ABC soit équilatéral, il faut et il suffit qu'il soit isocèle en A ($AB = AC$) et que l'angle $\hat{A} = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ vaille $\pm\pi/3$. On devra donc avoir Z (défini en a)) $= e^{\pm i\pi/3}$; or cela revient à dire que $Z = -j$ ou $Z = -j^2$. Ainsi, si $a = 1 + i$ et $b = 2$, c doit vérifier l'équation $(c-2) = -(c-(1+i))j$, de solution $c_1 = \dfrac{2-(1+i)j}{1+j} = -j(2-(1+i)j) = \dfrac{3-\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i}{2}$, ou l'équation $(c-2) = -(c-(1+i))j^2$, de solution $c_2 = \dfrac{2-(1+i)j^2}{1+j^2} = -j^2(2-(1+i)j^2) = \dfrac{3+\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i}{2}$. On peut faire remarquer que l'existence de deux solutions était géométriquement évidente (C est à l'intersection des cercles de centres A et B, et de rayon AB).

c) Plus généralement, si le triangle ABC est équilatéral, c'est, dans tous les cas, que $Z = -j$ ou $Z = -j^2$, donc que $(c-b) = -j(c-a)$, ou que $(c-b) = -j^2(c-a) = -\bar{j}(c-a)$. Développant la première relation, on obtient donc $aj + b + c(-1-j) = 0$, et comme $1 + j + j^2 = 0$, multipliant par j, on obtient $aj^2 + bj + c = 0$; de même, la seconde relation implique $a\bar{j}^2 + b\bar{j} + c = 0$. Réciproquement, partant par exemple de $aj^2 + bj + c = 0$, on obtiendra $Z = -j$ si $c \neq a$ (et alors on aura également $c \neq b$ et $a \neq b$); en d'autres termes, le triangle ABC sera équilatéral dès que A et B seront distincts.

d) Excluant le cas $a = b$, on vient de voir que ABC équilatéral $\iff a\bar{j}^2+b\bar{j}+c = 0$ ou $aj^2 + bj + c = 0 \iff (a\bar{j}^2 + b\bar{j} + c)(aj^2 + bj + c) = 0$. Développant cette dernière expression (et remarquant que $\bar{j}^2 = j$), on obtient $a^2 + b^2 + c^2 + ab(j^2 + j^4) + ac(j + j^2) + bc(j^2 + j) = 0$, et comme $1 + j^2 = j^2 + j^4 = -1$, on en déduit finalement que ABC équilatéral $\iff a^2+b^2+c^2 = ab+ac+bc$ (si $a \neq b$).

2

Question de cours

Les définitions des bijections et bijections réciproques sont classiques (voir chapitre 6, formulaire) ; ne pas «confondre» fonction et image : f^{-1} est l'application de B dans A qui à tout $b \in B$ associe l'unique antécédent de b par f, c'est-à-dire que $f(f^{-1}(b)) = b$. La définition «officielle» du DL_n de f est (chapitre 10) : «l'unique polynôme P de degré $\leq n$ (s'il existe) tel que $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$, où ε est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$». Les principaux DL à connaître sont ceux de $x \mapsto (1 + x)^a$, de $x \mapsto \ln(1 + x)$, et des fonctions exp, sin et cos, ainsi peut-être que celui de Arc tg (voir le formulaire du chapitre 10).

Exercice

a) Comme on a $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5} = \sqrt{(x + 1)^2 + 4} \geq 2$, on voit que f est la restriction à $[-1, +\infty[$ d'une application de $\mathbf{R}$ dans $[2, +\infty[$, donc f est une application.

b) Cherchons les antécédents par f de $y \geq 2$. Il s'agit des $x \geq -1$ tels que $f(x) = y$, c'est-à-dire tels que $x^2 + 2x + 5 = y^2$, donc $(x + 1)^2 = y^2 - 4$. Comme, par hypothèse, $x \geq 1$ et $y^2 \geq 4$, on voit qu'il existe un seul antécédent de y, $x = f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{y^2 - 4}$. Ceci montre que f est bijective, et que f^{-1} est la bijection de $[2, +\infty[$ vers $[-1, +\infty[$ donnée par $f^{-1} : x \mapsto -1+\sqrt{x^2 - 4}$.

c) On voit facilement que f est croissante (sur $[-1, +\infty[$) (et f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle, par composition) ; comme on a $f(x) = x\sqrt{1 + 2/x + 5/x^2} = x\sqrt{1 + u}$, avec $u = 2/x + 5/x^2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u = 0$, on peut donc écrire $f(x) = x(1+u/2)+u\varepsilon(u)$ (avec $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$), donc $f(x) = x+1+5/x+(2+5/x)\varepsilon(u)$, ce qui montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1) = 0$, et donc que la droite $[Y = X+1]$ est asymptote oblique à $\mathcal{G}_f$ (et située au dessus du graphe, puisque $\varepsilon(u) < 0$, mais il faudrait calculer un DL_2 pour le montrer rigoureusement). Remarque importante : on n'oubliera pas de ne tracer que la portion du graphe correspondant au domaine de f, soit la partie située à droite de $x = -1$

d) Le cours préconise l'utilisation de la forme canonique pour les radicaux du second degré; on a donc $I(x) = \int_0^x (t^2 + 2t + 5)^{1/2}dt = \int_0^x \sqrt{(t + 1)^2 + 4}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^x \sqrt{\frac{(t + 1)^2}{4} + 1}\, dt$; posant $T = \frac{t + 1}{2}$, puis $u = \text{sh}^{-1}(T)$, on aboutit à

$I(x) = \displaystyle\int_{\mathrm{sh}^{-1}(1/2)}^{\mathrm{sh}^{-1}((x+1)/2)} \mathrm{ch}^2 u \, du$. On sait (et il faut au besoin savoir le redémontrer) que $\mathrm{sh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, tous calculs faits, on obtient

$$I(x) = \frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5} + 2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}) - \ln 4.$$

Il n'était matériellement pas possible de terminer ces calculs dans le temps imparti ; on ne demande à l'élève que de connaître la démarche d'intégration, et de savoir manipuler les fonctions hyperboliques réciproques.

3

Question de cours

La formule de changement de variable demandée (c'est-à-dire celle de calcul d'une intégrale par changement de variable, comme l'exercice le laissait supposer ; mais il n'était pas défendu de demander des précisions) est $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, où φ est une application dérivable de $[c', d']$ vers D_f (en posant $c' = \min(c,d)$ et $d' = \max(c,d)$), telle que $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$. On l'utilise souvent (mais ce n'est pas indispensable) avec φ difféomorphisme (bijection dérivable, de bijection réciproque dérivable), sous la forme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Exercice

a) Il suffit de montrer que tout $t > 1$ (donc tel que $t^2 - 1 > 0$) possède un antécédent unique $x > -1$, donc de résoudre $\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{1/2} = t$; on obtient $x = \varphi^{-1}(t) = \frac{3-t^2}{t^2-1} = -1 + \frac{2}{t^2-1} > -1$.

b) $t = \varphi(u)$ est un changement de variable acceptable sur $]-1, +\infty]$, puisque c'est un difféomorphisme sur cet intervalle ; on a donc $F(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi(u)\,du = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \varphi(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t)\,dt$; comme on a $(\varphi^{-1})'(t) = \dfrac{-4t}{(t^2-1)^2}$, on obtient $F(x) = \displaystyle\int_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \frac{-4t^2}{(t^2-1)^2}\,dt$, qu'il est plus facile d'intégrer par partie sous la forme $\int_a^b t(\varphi^{-1})'(t)\,dt = t\varphi^{-1}(t)\Big|_a^b - \int_a^b \varphi(t)\,dt$; on obtient finalement (après la décomposition en éléments simples $\dfrac{2}{t^2-1} = \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+1}$) :

$$F(x) = \frac{2t}{t^2-1} + \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\varphi(x)}.$$

c) On sait que $(1+u)^{1/2} = 1 + u/2 + u\varepsilon(u)$, avec $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$. Comme $\varphi(x) = (1 + 2/(x+1))^{1/2}$, on peut écrire (quand x tend vers $+\infty$) que

$\varphi(x) - 1 = \dfrac{1}{x+1}(1 + 2\varepsilon((x+1)^{-1}))$, ce qui montre (par définition des fonctions équivalentes) que $\varphi(x) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x+1}$, et donc que $\varphi(x) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

---

3 a

Exercice

a) On peut remarquer que $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$, et donc que $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) > 0$. Ce contrôle est indispensable compte tenu de la définition de f (de son ensemble d'arrivée, pour être exact) : une erreur grave serait de se contenter de remarquer que $x^2 + 1 > 0$, et donc que $f(x)$ «existe».

b) Pour montrer que f est bijective et déterminer $f^{-1}(y)$,, il suffit (appliquant les définitions), de résoudre l'équation $x + \sqrt{x^2+1} = y$ (et de montrer qu'elle admet une solution unique pour tout $y > 0$). Or elle implique $x^2 + 1 = y^2 + x^2 - 2yx$, donc $x = \dfrac{y^2 - 1}{2y}$, et réciproquement cette solution convient.

c) On remarque que $f \circ g(t) = f(g(t)) = \operatorname{sh} t + \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1} = \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t = e^t$, ce qui montre que $f \circ g$ est une bijection de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}^+$; comme on sait que g est bijective (et que $g^{-1}(u) = \operatorname{sh}^{-1}(u) = \ln(u + \sqrt{u^2+1})$), on en déduit que $f = \exp \circ g^{-1}$ est également bijective.

d) Le changement de variable $u = \varphi(t) = g(t)$, fortement suggéré par l'énoncé, aboutit à $\int_0^x f(u)\,du = \int_0^{g^{-1}(x)} g'(t)(f \circ g)(t)\,dt = \int_0^{\ln(x+\sqrt{x^2+1})} (\operatorname{ch} t)e^t\,dt$, soit $\displaystyle\int_0^x f(u)\,du = \left[\frac{e^{2t} + 2t}{4}\right]_0^{\ln(x+\sqrt{x^2+1})} = \frac{2\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + 2x^2 + 2x\sqrt{x^2+1}}{4}$.

4

Question de cours

f est une bijection de A vers B si f est une application (une fonction partout définie) telle qu'à tout élément b de B correspond un antécédent unique par f (c'est-à-dire que $\forall b \in B, \exists! a \in A,\ f(a) = b$). L'application qui à b associe cet antécédent s'appelle la bijection réciproque de f et se note f^{-1}, on a donc (pour tout $a \in A$ et $b \in B$) $b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$. Une application d'un sous-ensemble I de $\mathbf{R}$ (généralement, I est un intervalle non réduit à un point) vers $\mathbf{R}$ est dite dérivable si, en tout point a de I, la limite $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et appartient à $\mathbf{R}$ (cette limite, $f'(a)$, s'appelle le nombre dérivé en a). Si f est bijective, dérivable en a, et si $f'(a) \neq 0$, la bijection récipoque $g = f^{-1}$ est dérivable en $b = f(a)$, et l'on a $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$, ce qui montre que sur l'image par f d'un intervalle où f' ne s'annule pas, $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Exercice

a) f est une application, puisque $x \geq 0 \Rightarrow x/(1+\sqrt{x}) \geq 0$; résolvons (dans $\mathbf{R}_+$) l'équation $f(x) = y$; on a, posant $X = \sqrt{x}$, $X^2 - Xy - y = 0$; pour $y \geq 0$, cette équation du second degré possède deux racines, de produit $-y \leq 0$, ce qui montre qu'elle admet exactement une racine positive, donc f est bijective; et plus précisément, $f^{-1}(y) = \dfrac{(y+\sqrt{y^2+4y})^2}{4}$.

b) En tout point $x > 0$, f est dérivable, comme quotient de fonctions dérivables. En 0, on a $f(x) - f(0) = f(x)$, et comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x)/x = 1$, f est dérivable sur tout $\mathbf{R}_+$, et $f'(x) = \dfrac{x+2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ pour $x > 0$, et $f'(0) = 1$. Un calcul direct donne $f''(x) = \dfrac{-3}{4(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2(1+\sqrt{x})^3}$ pour tout $x > 0$, ce qui laisse supposer que $f''(0)$ n'existe pas; de fait, comme $\lim\limits_{x\to 0} f''(x) = -\infty$, une application soignée du théorème des accroissements finis (à f', sur l'intervalle $[0, x]$) montre que $\lim\limits_{x\to 0}(f'(x) - f'(0))/x = -\infty$. f est donc (sur $\mathbf{R}_+$) de classe $\mathcal{C}^1$, mais non de classe $\mathcal{D}^2$. Comme $f'(x)$ ne s'annule jamais sur $\mathbf{R}_+$, on sait que f^{-1} est également dérivable sur $\mathbf{R}_+$.

c) On a, posant $u^2 = t$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2u^3}{1+u}\,du =$ $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} (2u^2 - 2u + 2 - \frac{2}{1+u})\,du = 2x^{3/2}/3 - x + 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x})$. Plus généralement, $\displaystyle I_n = \int_0^1 \left(\frac{x^n}{1+\sqrt{x}}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{2t^{2n+1}}{1+t}\right) dt$ (en posant $t^2 = x$), donc, remarquant que (formule des suites géométriques) $\dfrac{t^N+1}{t+1} = t^{N-1} - t^{N-2} + t^{N-3} - \cdots + (-1)^N$, on obtient $I_n = \dfrac{2}{2n+1} - \dfrac{2}{2n} + \dfrac{2}{2n-1} - \cdots - 1 + 2 - 2\ln(2)$.

---

4 a

Exercice

a) La justification de ce que f est une application est ici triviale (ce qui ne doit pas empêcher de l'énoncer clairement...); f est dérivable sur $]0, +\infty[$ (comme composée de fonctions dérivables), mais cet argument ne suffit pas en 0; il faut revenir à la définition de la dérivée, ce qui amène ici à calculer $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x)}{x} = 1/(1+\sqrt{x}) = 1$; cette limite étant finie, f est dérivable (à droite) en 0.

b) On obtient aisément $X = f^{-1}(x) = (x + \sqrt{x^2+4x})^2/4$ (en posant $X = x(1+\sqrt{X})$, puis $t = \sqrt{X}$).

c) Il ne s'agit là que du calcul d'intégrales «classiques» : posant $u = \sqrt{t}$, et décomposant en éléments simples sans oublier la partie principale, on obtient

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2u^3}{1+u}\,du = \frac{2u^3}{3} - u^2 + 2u - 2\ln(1+u)\Big]_0^{\sqrt{x}}$$
$$= \frac{2x\sqrt{x}}{3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x})$$

et

$$\int_0^x f^2(t)\,dt = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2u^5}{(1+u)^2}\,du = 2\int_0^{\sqrt{x}} u^3 - 2u^2 + 3u - 4 + \frac{5(1+u)-1}{(1+u)^2}\,du$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{4x\sqrt{x}}{3} + 3x - 8\sqrt{x} + 10\ln(1+\sqrt{x}) + \frac{2}{(1+\sqrt{x})^2}.$$

5

Question de cours

Les fonctions Arc sin, Arc cos et Arc tan sont les bijections réciproques de restrictions convenables des fonctions sin, cos, et tan. Mais il est sans doute plus conforme à l'esprit de ces questions de cours, ainsi qu'à l'utilisation du cours pour l'exercice qui suit, d'en donner les définitions sur le modèle suivant (voir chapitre 5) :

$\alpha = \operatorname{Arc}\cos x \iff -1 \le x \le 1,\ 0 \le \alpha \le \pi$, et $\cos\alpha = x$.

On dit que la droite d'équation $[Y = aX + b]$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$ si la distance $MP(x)$ (où M et P sont respectivement les points du graphe et de la droite, d'abscisse x) tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, c'est-à-dire si $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax - b = 0$.

Exercice

a) 1) On sait que la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan x$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto 1/(1+x^2)$. Appliquant le théorème de dérivation des fonctions composées, on en déduit que, sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \operatorname{Arc}\tan(1/x)$ est elle aussi dérivable, de dérivée $x \mapsto 1/(1+(1/x)^2) \times (1/x)' = -1/(1+x^2)$. Ainsi, sur l'intervalle $\mathbf{R}_+^*$, la fonction θ est dérivable, de dérivée nulle, ce qui montre qu'elle est constante.
2) On sait que $\alpha = \operatorname{Arc}\tan x \iff \tan\alpha = x$ et $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$; de même, posons $\beta = \operatorname{Arc}\tan(1/x)$; on aura donc $\tan\beta = 1/x$, et si $x > 0$, on aura $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$. Calculons alors $\cos\theta(x) = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. On sait que $\cos^2\alpha = 1/(1+\tan^2\alpha) = 1/(1+x^2)$, et donc que $\cos^2\beta = 1/(1+1/x^2)$; compte tenu des encadrements de α et β, on a $\cos\alpha > 0$, par exemple, et donc $\cos\alpha = (1+x^2)^{-1/2}$ et $\cos\beta = x\cos\alpha$. De même, on a $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \cos^2\beta$, $\sin^2\beta = \cos^2\alpha$ et $\sin\alpha > 0$; en définitive, on obtient donc $\cos\theta(x) = 0$, et comme $0 < \theta(x) = \alpha + \beta < \pi$, on voit directement que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\theta(x) = \pi/2$.

b) f est paire (comme produit de fonctions impaires), de classe $\mathcal{C}^\infty$; on a, sur $]0, +\infty[$, $f'(x) = \operatorname{Arc}\tan x + \dfrac{x}{1+x^2} > 0$; f est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On a le DL_n de Arc tan suivant : $\operatorname{Arc}\tan x = x - x^3/3 + x^5/5 - \cdots + (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1) + o(x^{2n+2})$. Or on a vu en a) que (pour $x > 0$) $\operatorname{Arc}\tan(1/x) = \pi/2 - \operatorname{Arc}\tan x$; on a donc, posant $X = 1/x$, $\operatorname{Arc}\tan(X) = \pi/2 - (x - x^2\varepsilon(x))$, avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = \lim_{X\to+\infty}\varepsilon(1/X) = 0$. Remplaçant, on obtient $f(X) = \pi X/2 - 1 + (1/X)\varepsilon(1/X)$, donc $\lim_{X\to+\infty}(f(X) - \pi X/2 + 1) = 0$, ce qui montre que la droite Δ, d'équation $[Y = \pi X/2 - 1]$, est asymptote oblique au graphe $\mathcal{G}_f$. Plus précisément (en prenant un DL_3), le même calcul montre que $f(X) = \pi X/2 - 1 + 1/3X^2 + 1/X^3\varepsilon_1(1/X)$, et donc que $f(X) - \pi X/2 + 1 = 1/(3X^2)(1 + \varepsilon_1(1/X)/3X)$. Quand X tend vers $+\infty$, comme $\lim_{x\to 0} x\varepsilon_1(x)/3 = 0$, la définition de Cauchy (en prenant $\varepsilon = 1/2$) implique qu'il existe un $A = 1/\alpha$ tel que, pour tout x, $0 < x < \alpha \iff X > A \Rightarrow (1 + \varepsilon_1(1/X)/3X) > 1/2$, ce qui montre que, pour $X > A$, le graphe $\mathcal{G}_f$ est au-dessus de l'asymptote Δ.

c) Par intégration par parties, on trouve $I = \int_0^x t\operatorname{Arc}\tan t\,dt = \left.\frac{t^2\operatorname{Arc}\tan t}{2}\right|_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{2(1+t^2)}\,dt = \frac{x^2}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\int_0^x (1 - \frac{1}{1+t^2})dt = \frac{x^2}{2(1+x^2)} - \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{Arc}\tan x}{2}$.

6

Question de cours

Soit $\mathcal{A}(n)$ une propriété de l'entier n que l'on veut démontrer par récurrence. Une démonstration par récurrence simple de $\mathcal{A}$ consiste à montrer que $\mathcal{A}(0)$ est vraie («base» de la récurrence), puis que si $\mathcal{A}$ est vraie pour un entier k quelconque, elle est encore vraie pour l'entier suivant $k+1$: $\forall k \in \mathbf{N}$, $\mathcal{A}(k) \Rightarrow \mathcal{A}(k+1)$ (on dit que $\mathcal{A}$ est héréditaire). (La présentation : $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $\mathcal{A}(k-1) \Rightarrow \mathcal{A}(k)$, plus pratique à l'oral, s'applique particulièrement bien dans le cadre de l'exercice proposé ici). Une démonstration par récurrence cumulative de $\mathcal{A}$ consiste à montrer que $\mathcal{A}(0)$ est vraie, puis que si $\mathcal{A}$ est vraie pour **tous** les entiers précédant $k+1$, elle est encore vraie pour $k+1$: $\forall k \in \mathbf{N}$, $(\forall j \in \mathbf{N}, 0 \le j \le k \Rightarrow \mathcal{A}(j)) \Rightarrow \mathcal{A}(k+1)$.

Exercice

a) On sait (théorème de composition des limites) que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n-1}$. Remplaçant dans l'équation de récurrence définissant u_n, on voit que, si u_n converge vers ℓ, on aura $\ell = (\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2(n+1)})\ell + 1$, donc $\ell = \ell/2 + 1 \Rightarrow \ell = 2$.

b) Montrons par récurrence (simple) que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{A}(n) : u_n \le \frac{2n+4}{n+3}$ est vraie. C'est évidemment vrai pour $n = 0$, puisque $u_0 = 1 \le 4/3$; supposons, pour un certain $k \ge 1$ (hypothèse de récurrence), que $\mathcal{A}(k-1) : u_{k-1} \le \frac{2(k-1)+4}{(k-1)+3} = \frac{2k+2}{k+2}$, on aura $u_k = \frac{k}{2k+2}u_{k-1} + 1 \le \frac{2k+2}{k+2}\frac{k}{2k+2} + 1 = \frac{2k+2}{k+2}$; or, pour $k > 0$, on a $\frac{2k+2}{k+2} < \frac{2k+4}{k+3}$, puisque $(2k+2)(k+3) = 2k^2 + 8k + 6 < 2k^2 + 8k + 8 = (2k+4)(k+2)$; $\mathcal{A}(k)$ est donc vraie, et, par récurrence, $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout n (on pouvait remarquer que cela prouvait en fait $u_n < \frac{2n+4}{n+3}\ldots$)

c) Comme, pour tout n, $(2n+4)/(n+3) < 2$, on vient de montrer que la suite u_n est majorée. On a de plus (pour $n > 0$) $u_n - u_{n-1} = 1 - \frac{n+2}{2n+2}u_{n-1} \ge 0$ (puisque $u_{n-1} \le \frac{2n+2}{n+2}$), ce qui montre que (u_n) est croissante. La suite (u_n), étant croissante majorée, converge donc (d'après le théorème de la borne supérieure), et on a vu en a) qu'elle a pour limite $\ell = 2$.

d) Montrons par récurrence la formule donnée dans l'énoncé : pour $n = 0$, on a bien $u_0 = 1 = \frac{1}{2^0(0+1)}\left(\sum_{k=0}^{0}(k+1)2^k\right)$. Supposons que cette formule soit vraie pour $n-1$ (avec n fixé ≥ 1), donc que $u_{n-1} = \dfrac{1}{n2^{n-1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)2^k\right)$; on aura donc $u_n = 1+\dfrac{n}{2n+2}\dfrac{1}{n2^{n-1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)2^k\right) = \dfrac{1}{(n+1)2^n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)2^k\right) + \dfrac{(n+1)2^n}{(n+1)2^n}$; donc la formule est encore vraie pour n, et, par récurrence, elle est toujours vraie. On sait que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$ donc que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k\right)}{(n+1)2^{n+1}} = 1$; par définition (puisque aucune de ces deux suites ne s'annule), cela entraîne que $\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k\right) \underset{+\infty}{\sim} (n+1)2^{n+1} \underset{+\infty}{\sim} n2^{n+1}$.

---

6 a

Exercice

a) On sait (théorème de composition des limites) que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n-1}$. Remplaçant dans l'équation de récurrence définissant u_n, on voit que, si u_n converge vers ℓ, on aura $\ell = (\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1})\ell + 1$, donc $\ell = \ell/2 + 1 \Rightarrow \ell = 2$.

b) Montrons par récurrence (simple) que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{A}(n) : u_n \leq \dfrac{2n+3}{n+2}$ est vraie. C'est évidemment vrai pour $n = 0$, puisque $u_0 = 1 \leq 3/2$; supposons, pour un certain $k \geq 1$ (hypothèse de récurrence), que $\mathcal{A}(k-1) : u_{k-1} \leq \dfrac{2(k-1)+3}{(k-1)+2} = \dfrac{2k+1}{k+1}$, on aura $u_k = \dfrac{k}{2k+1}u_{k-1} + 1 \leq \dfrac{2k+1}{k+1}\dfrac{k}{2k+1} + 1 = \dfrac{2k+1}{k+1}$; or, pour $k > 0$, on a $\dfrac{2k+1}{k+1} < \dfrac{2k+3}{k+2}$, puisque $(2k+1)(k+2) = 2k^2+5k+2 < 2k^2+5k+3 = (2k+3)(k+1)$; $\mathcal{A}(k)$ est donc vraie, et, par récurrence, $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout n (on pouvait remarquer que cela prouvait en fait $u_n < \dfrac{2n+3}{n+2}\ldots$)

c) Comme, pour tout n, $(2n+3)/(n+2) < 2$, on vient de montrer que la suite u_n est majorée. On a de plus (pour $n > 0$) $u_n - u_{n-1} = 1 - \dfrac{n+1}{2n+1}u_{n-1} \geq 0$ (puisque $u_{n-1} \leq \dfrac{2n+1}{n+1}$), ce qui montre que (u_n) est croissante. La suite (u_n), étant croissante majorée, converge donc (d'après le théorème de la borne supérieure), et on a vu en a) qu'elle a pour limite $\ell = 2$.

d) Montrons par récurrence la formule donnée dans l'énoncé : pour $n = 0$, on a bien $u_0 = 1 = \dfrac{2^0(0!)}{1!}\left(\sum_{k=0}^{0}\dfrac{(2k+1)!}{2^k(k!)^2}\right)$ (puisque $0! = 1$). Supposons que cette formule soit vraie pour $n-1$, donc que $u_{n-1} = \dfrac{2^{n-1}(n-1)!^2}{(2n-1)!}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{(2k+1)!}{2^k(k!)^2}\right)$;

on aura donc

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{n}{2n+1} \frac{2^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-1)!} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+1)!}{2^k (k!)^2} \right) \\ &= 1 + \frac{2n^2}{2n(2n+1)} \frac{2^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-1)!} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+1)!}{2^k (k!)^2} \right) \\ &= \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+1)!}{2^k (k!)^2} \right) + \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \times \frac{(2n+1)!}{2^n (n!)^2}; \end{aligned}$$

donc la formule est encore vraie pour n, et, par récurrence, elle est toujours vraie.

7

Question de cours

Soit $\mathcal{A}(n)$ une propriété de l'entier n. Une démonstration de $\mathcal{A}$ par récurrence (simple) consiste à montrer que $\mathcal{A}(0)$ (ou, plus généralement, $\mathcal{A}(n_0)$) est vraie («base» de la récurrence), puis que si $\mathcal{A}$ est vraie pour un entier k quelconque, elle est encore vraie pour l'entier suivant $k+1$: $\forall k \in \mathbf{N}$, $k \geq n_0$, $\mathcal{A}(k) \Rightarrow \mathcal{A}(k+1)$ (on dit que $\mathcal{A}$ est héréditaire). Alors, par récurrence, $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.
On note $\binom{n}{p}$ le nombre $\dfrac{n(n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p(p-1) \times \cdots \times 1} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$; on appelle ces nombres les coefficients du binôme, car ils interviennent dans la formule de Newton (formule du binôme) : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. On montre facilement la propriété de symétrie $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$; il est un peu plus délicat d'obtenir la relation de récurrence $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$, pour laquelle il est commode d'utiliser la convention $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$.

Exercice

a) 1) Montrons par récurrence que $\mathcal{A}(n)$: $s_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$; $\mathcal{A}(1)$: $1 \times \binom{1}{1} = 1 \times 2^0$ est évidemment vraie, puisque $\binom{1}{1} = 1$; supposons que $s_K = K2^{K-1}$ pour un K fixé ≥ 1. On aura alors $s_{K+1} - s_K = s_{K+1} - K2^{K-1} = \sum_{k=0}^{K+1} k\binom{K+1}{k} - \sum_{k=0}^{K} k\binom{K}{k} =$
[Cet exercice est un bon exemple du rôle de la préparation écrite. Il devenait vite clair que la démonstration par récurrence était très délicate; il convenait donc de préparer soigneusement la suite de l'exercice, puis, au tableau, d'exposer le schéma de la récurrence, d'avouer qu'on n'avait su la mener à son terme, mais que la suite de l'exercice avait été faite...]
$= K+1+\sum_{k=1}^{K} k(\binom{K+1}{k} - \binom{K}{k}) = K+1+\sum_{k=1}^{K} k\binom{K}{k-1} = K+1+\sum_{k=0}^{K-1} (k+1)\binom{K}{k}$

(par décalage), donc $s_{K+1} - s_K = K + 1 + \sum_{k=0}^{K-1} k\binom{K}{k} + \sum_{k=0}^{K-1} \binom{K}{k} = K + 1 + s_K - K + 2^K - 1$ (en utilisant la formule du binôme pour cette dernière somme, écrite sous la forme $(1+1)^K$). Finalement, on a donc la relation $s_{K+1} = 2s_K + 2^K$, et la récurrence devient facile, en effet (par hypothèse) $s_{K+1} = 2K2^{K-1} + 2^K = (K+1)2^K$; la propriété est donc héréditaire.

2) Plus simplement, on remarque (par changement d'indice) que $s_n = \sum_{k=0}^{n} (n - k)\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^n - s_n$, donc que l'on a bien $s_n = n2^{n-1}$!

[Ce qui confirme la remarque précédente; il était en particulier essentiel de ne pas se décourager en voyant que les calculs de a) n'aboutissaient pas.]

b) On sait (formule du binôme) que $S(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$; dérivant, on obtient donc $S'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} kx^{k-1}$.

c) Prenant $x = 1$ dans cette dernière formule, on retrouve bien $S'(1) = n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = s_n$. De même, prenant cette fois une primitive de $S(x)$ (par exemple celle valant 1 en 0), on trouve $\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k} x^{k+1}}{k+1}$, et donc, avec $x = 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}.$$

8

Question de cours

Soit $\mathcal{A}(n)$ une propriété de l'entier n. Une démonstration de $\mathcal{A}$ par récurrence (simple) consiste à montrer que $\mathcal{A}(0)$ (ou, plus généralement, $\mathcal{A}(n_0)$) est vraie («base» de la récurrence), puis que si $\mathcal{A}$ est vraie pour un entier k quelconque, elle est encore vraie pour l'entier suivant $k+1$: $\forall k \in \mathbf{N},\ k \geq n_0,\ \mathcal{A}(k) \Rightarrow \mathcal{A}(k+1)$ (on dit que $\mathcal{A}$ est héréditaire). Alors, par récurrence, $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

La formule du binôme dit que (pour tous les x et y complexes) $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Soit a et b deux entiers relatifs (avec $a \neq 0$). On dit que b est divisible par a (ou que a divise b) s'il existe un entier relatif k tel que $b = ka$.

Exercice

a) Il est clair que 7 divise $A_0 = 5^0 - 2^0 = 0$ (puisque $7 \times 0 = 0$). Supposons (hypothèse de récurrence) que 7 divise $A_k = 5^{6k} - 2^{3k}$, c'est-à-dire que $5^{6k} - 2^{3k} = 7d$. On aura alors $A_{k+1} = 5^{6k+6} - 2^{3k+3} = 5^6 A_k + 5^6 2^{3k} - 2^{3k+3} = 5^6 A_k - 2^{3k}(5^6 - 8) = 7(5^6 d - 2^{3k} \times 2231)$, puisque $5^6 - 8 = 15617 = 7 \times 2231$. Ainsi, la propriété est héréditaire, et donc, par récurrence, toujours vraie.

b) Remarquant que $5 = 7 - 2$, et utilisant la formule du binôme, on voit que $A_n = (7-2)^{6n} - 2^{3n} = -2^{3n} + \sum_{k=0}^{6n} \binom{6n}{k} 7^k 2^{6n-k} = 7(\sum_{k=1}^{6n} \binom{6n}{k} 7^{k-1} 2^{6n-k}) + 2^{6n} - 2^{3n}$; il suffit donc de montrer que $2^{3n} - 1$ est toujours divisible par 7. Or, d'après la formule des suites géométriques, on a $8^n - 1 = (8-1) \sum_{k=0}^{n-1} 8^k$, ce qui termine la démonstration.

c) Plus généralement, appliquant la formule des suites géométriques (sous la forme $x^n - 1 = (x-1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$, pour $n \geq 1$) à $x = a/b$, on obtient (pour $b \neq 0$) $b^n((a/b)^n - 1) = b((a/b) - 1) b^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (a/b)^k$, donc $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ (ce qu'on pouvait aussi contrôler en développant l'expression proposée) ; on en déduit donc, en posant $a = 5^6$ et $b = 2^3$, que $A_n = 15617 \sum_{i=0}^{n-1} 5^{6n-6i-6} 2^{3i}$, ce qui montre que A_n est divisible par 7 (ainsi que par $2231 = 23 \times 97$).

9

Question de cours

Soit u_n une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ (dite relation de récurrence linéaire à deux termes). On voit aisément par substitution que les suites géométriques $v_n = Ak^n$ (avec $k \neq 0$) vérifiant la même relation sont celles pour lesquelles k satisfait l'équation caractéristique $k^2 = ak + b$. Si cette équation possède deux racines (réelles ou complexes) distinctes k_1 et k_2, on montre (par récurrence) que la suite u_n est combinaison linéaire des suites géométriques correspondantes, c'est-à-dire que u_n est donnée par la formule explicite $u_n = Ak_1^n + Bk_2^n$, où A et B sont des constantes ne dépendant que de u_0 et u_1. Si l'équation caractéristique admet la racine double $k_0 = a/2$ (et donc, si $a^2 = -4b$), u_n est donnée par $u_n = (An + B)k_0^n$.
Soit $\mathcal{A}(n)$ une propriété de l'entier n. Une démonstration de $\mathcal{A}$ par récurrence (simple) consiste à montrer que $\mathcal{A}(0)$ (ou, plus généralement, $\mathcal{A}(n_0)$) est vraie («base» de la récurrence), puis que si $\mathcal{A}$ est vraie pour un entier k quelconque, elle est encore vraie pour l'entier suivant $k+1$: $\forall k \in \mathbf{N}$, $k \geq n_0$, $\mathcal{A}(k) \Rightarrow \mathcal{A}(k+1)$ (on dit que $\mathcal{A}$ est héréditaire). Alors, par récurrence, $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.
Les formules d'Euler définissent les fonctions trigonométriques à l'aide de l'exponentielle complexe : $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$; $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. La formule de

Moivre utilise la relation $\cos x + i \sin x = e^{ix}$, définissant l'exponentielle complexe, pour obtenir $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$.

Exercice

[Il fallait d'abord, bien évidemment, faire remarquer que, pour $0 < \theta < \pi$, on avait $\sin\theta > 0$, et que les formules de l'énoncé étaient donc toutes définies.]

a) Choisissons comme propriété à démontrer $\mathcal{A}(n) : u_n = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ et $u_{n+1} = \dfrac{\sin(n+2)\theta}{\sin\theta}$. On a $\mathcal{A}(0)$, car $u_0 = 1 = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}$, et $u_1 = 2\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$ (d'après les formules de duplication). Montrons que $\mathcal{A}$ est héréditaire : il suffit donc de vérifier que si $u_k = \dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$ et si $u_{k+1} = \dfrac{\sin(k+2)\theta}{\sin\theta}$, on aura bien $u_{k+2} = \dfrac{\sin(k+3)\theta}{\sin\theta}$. Remplaçant dans la relation de récurrence définissant u_n, cela revient à montrer que $\sin(k+2)\theta = 2\cos\theta\sin(k+1)\theta - \sin\theta$. Or, on sait que $\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$; on a donc bien le résultat cherché, en prenant $p = (k+2)\theta$ et $q = \theta$.

b) Utilisant les résultats rappelés dans la question de cours, on voit qu'on doit d'abord résoudre l'équation caractéristique $k^2 - (2\cos\theta)k + 1 = 0$, c'est-à-dire $(k-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta$; on obtient donc $k_1 = e^{i\theta}$ et $k_2 = e^{-i\theta}$; comme $0 < \theta < pi$, $k_1 \neq k_2$. Ainsi, on aura $u_n = Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta}$; or $u_0 = 1 \Rightarrow A + B = 1$, et $u_1 = 2\cos\theta \Rightarrow Ae^{i\theta} + Be^{-i\theta} = 2\cos\theta$, donc $A = \dfrac{1 - i\cos\theta}{\sin\theta}$ et $B = \dfrac{1 + i\cos\theta}{\sin\theta}$; remplaçant (et utilisant les formules d'Euler), on obtient finalement $u_n = \cos n\theta + \dfrac{\cos\theta\sin n\theta}{\sin\theta}$, et comme $\sin(n\theta + \theta) = \sin t\cos n\theta + \sin n\theta\cos\theta$, on retrouve la formule obtenue en a).

c) Le résultat demandé peut s'obtenir par une récurrence immédiate, les P_n satisfaisant les relations $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$ et $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$. Mais l'énoncé demandait plutôt une démonstration directe : sachant (formule de Moivre) que $\sin n\theta = \mathrm{Im}((\cos\theta + i\sin\theta)^n)$, et posant $X = \cos\theta$, on a

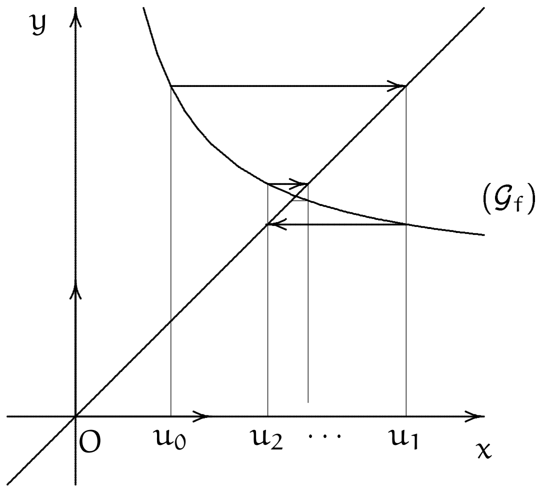
$$\begin{aligned}\sin n\theta &= \sum_{\substack{p \text{ impair} \\ 0 \le p \le n}} \binom{n}{p} X^{n-p} i^{p-1} \sin^p\theta \\ &= (\sin\theta) \sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^k \binom{n}{2k+1} X^{n-2k-1} (\sin^2\theta)^k,\end{aligned}$$

et comme $\sin^2\theta = 1 - X^2$, on en déduit le résultat cherché : $u_n = P_n(\cos\theta)$, avec $P_n(X) = \sum_{k=0}^{E((n+1)/2)} \binom{n+1}{2k+1} X^{n-2k} (X^2 - 1)^k$.

10

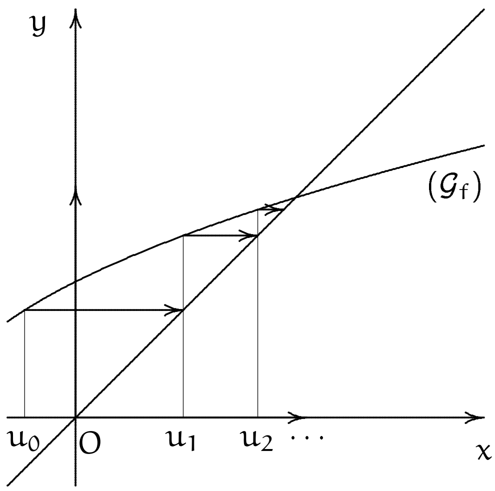
Question de cours

Une suite $u = (u_n)$ est monotone si elle est croissante ($\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$) ou décroissante ($\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$). Si une suite u est croissante, elle converge (vers sa borne supérieure) si, et seulement si, elle est majorée ($\exists M$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq M$), et sinon, $\lim u = +\infty$; de même, si u est décroissante, elle converge (vers sa borne inférieure) si, et seulement si, elle est minorée ($\exists m$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq m$), et sinon, $\lim u = -\infty$. On a la représentation graphique suivante d'une suite définie par itération ($u_{n+1} = f(u_n)$) :



Exercice

a)



(on peut constater sur ce graphique que les résultats des trois premières questions restent vrais même si $-1 < u_0 < 0$).

b) Montrons d'abord par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 < u_n < 1$: la propriété est vraie (par hypothèse) pour u_0 ; si $0 < u_k < 1$, on aura $1/2 < (1 + u_k)/2 < 1$, donc $0 < \sqrt{2}/2 < u_{k+1} < 1$. Pour tout $x \in]0, 1[$, on a $2x^2 - 1 - x < 0$ (puisque les racines de ce trinôme sont $-1/2$ et 1) ; on en déduit donc que $x < ((1+x)/2)^{1/2}$, et en particulier que $u_n < ((1+u_n)/2)^{1/2} = u_{n+1}$; la suite (u_n) est donc strictement croissante.

c) La suite (u_n), étant croissante et majorée (par 1), converge vers une limite (finie) ℓ ; on sait (par continuité de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$), que $f(\ell) = \ell$

(théorème du point fixe), et que $0 < \ell \leq 1$; comme l'équation $x = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$ n'a que la solution $x = 1$, on voit que $\lim u_n = 1$.

d) Posons $\theta_n = \operatorname{Arc}\cos u_n$; on a donc $\cos\theta_n = u_n$, et $0 < \theta_n < \pi/2$. Comme $2u_{n+1}^2 - 1 = u_n$, et que $\cos 2\theta_{n+1} = 2\cos^2\theta_{n+1} - 1$, on voit que $\cos 2\theta_{n+1} = \cos\theta_n$. Or $2\theta_{n+1}$ et θ_n appartiennent à l'intervalle $]0,\pi[$; ayant le même cosinus, ils sont donc égaux. Ainsi, $\theta_{n+1} = \theta_n/2$, et, la suite θ_n étant géométrique, on a $\theta_n = \theta_0/2^n = \dfrac{\operatorname{Arc}\cos u_0}{2^n}$. Ainsi, $u_n = \cos\theta_n = \cos 2\theta_{n+1} = 1 - 2\sin^2\theta_n$, donc $1 - u_n = 2\sin^2\theta_n$. Or $\lim\theta_n = 0$, donc $\sin\theta_n \sim \theta_n$. On obtient ainsi, finalement :

$$\ell - u_n \sim 2\theta_n^2 = \frac{(\operatorname{Arc}\cos u_0)^2}{2^{2n-1}}.$$

11

Question de cours

Si f et g sont dérivables jusqu'à l'ordre n en a, il en est de même de $f \times g$, et l'on a, en notant $f^{(k)}$ la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f, la formule de Leibniz :

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a),$$

avec la convention $f^{(0)} = f$.

On dit que P est le développement limité de f à l'ordre n en 0 si P est un polynôme de degré $\leq n$, et si l'on peut écrire $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Si f est dérivable jusqu'à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0, f admet un DL_n donné par la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^n\varepsilon(x).$$

Exercice

a) $f_n(x) = x^{n-1}\ln(1+x) = g(x)h(x)$; $g_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!}{(n-1-k)!} x^{n-1-k} & \text{si } k < n \\ 0 & \text{si } k \geq n \end{cases}$

et $h^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ (si $k \geq 1$) ; d'après la formule de Leibniz, et pour tout $x > -1$, $f_n^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_n^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} g_n^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$ (puisque le dernier terme de la somme est nul), et donc

$$\begin{aligned} f_n^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} x^{n-1-k} \frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!}{(1+x)^{n-k}} \\ &= \frac{-(n-1)!}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k} x^{n-k}}{(1+x)^{n-k}} \quad (\text{si } x \neq 0) ; \end{aligned}$$

comme on sait que $(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^{n-k} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}X^{n-k}$, on en déduit, en posant $X = \dfrac{-x}{1+x}$, que $f_n^{(n)}(x) = \dfrac{-(n-1)!}{x}((1+X)^n - 1)$ et donc que $\forall x \in]-1,+\infty[- \{0\}$, $f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}(1-(1+x)^{-n})$.

b) f_n étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ (comme produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$), on a donc $f_n^{(n)}(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(n-1)!}{x}(1-(1+x)^{-n})$; comme on a $(1+x)^{-n} = 1 - nx + x\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, on voit que $f_n^{(n)}(0) = \lim\limits_{x\to 0} n! + \varepsilon(x) = n!$.

c) On sait que $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{j}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + x^j\varepsilon(x)$, on en déduit donc que $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{j}\frac{(-1)^{k+1}x^{n-1+k}}{k} + x^{n-1+j}\varepsilon(x)$.

d) Et comme on sait, d'après la formule de Young, que le coefficient de x^p du DL_n de f est $f^{(p)}(0)/p!$ (pour $n \geq p$), on en déduit finalement (par unicité des DL) que $f_n^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ \frac{(-1)^{n+k}k!}{k-n} & \text{si } k \geq n \end{cases}$.

12

Question de cours

Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, $g \circ f$ est dérivable en a et l'on a (formule de dérivabilité des fonctions composées) $(g\circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$. Si f est continue sur un intervalle contenant a et b, elle admet des primitives sur cet intervalle; notant F une de ces primitives (donc telle que $F'(x) = f(x)$), on appelle intégrale définie de f entre a et b, et l'on note $\int_a^b f(x)\,dx$, le nombre $F(b) - F(a)$.

Exercice

a) Notant φ une primitive de f, on a (pour tout $x \geq 0$) $F(x) = \varphi(x) + \varphi(1/x) - 2\varphi(0)$; F est donc dérivable (en tant que somme de composées de fonctions dérivables) et $F'(x) = f(x) - 1/x^2 f(1/x)$; d'après les hypothèses faites sur f, on a donc $F'(x) = 0$, ce qui montre que F est constante sur $]0,+\infty[$.

b) $h'(x) = \operatorname{Arc\,tan} x + \dfrac{x}{1+x^2}$, ce qui montre que h est croissante sur $]0,+\infty[$ (c'est d'ailleurs vrai pour tout produit de fonctions croissantes positives). On a $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)/x = \pi/2$, la courbe admet donc la direction asymptotique $[Y = \pi X/2]$; calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) - \pi x/2$; posant $X = 1/x$, cela revient à calculer $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\operatorname{Arc\,tan}(1/X) - \pi/2}{X}$. Posons $f(x) = 1/(1+x^2)$; on vérifie aisément que $f(1/x) = x^2 f(x)$, et donc que $F(x) = \operatorname{Arc\,tan} x + \operatorname{Arc\,tan}(1/x)$ est constante, ce qui montre que, pour tout $x > 0$, on a $\operatorname{Arc\,tan} x + \operatorname{Arc\,tan}(1/x) = 2F(1) = \pi/2$. Ainsi, la limite cherchée est $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{-\operatorname{Arc\,tan}(X)}{X} = -1$ (par définition du nombre dérivé), et finalement le graphe de h admet (en $+\infty$) une asymptote oblique d'équation $Y = \pi X/2 - 1$. Calculons $H(x) = \int_0^x h(u)\,du$; par intégration par parties, on a $H(x) = u^2 \operatorname{Arc\,tan}(u)/2\Big|_0^x - \int_0^x \frac{u^2}{2(1+u^2)}\,du$; cette dernière intégrale vaut $\int_0^x \frac{u^2+1-1}{2(1+u^2)}\,du = (x - \operatorname{Arc\,tan} x)/2$, et l'on obtient donc $H(x) = ((x^2+1)\operatorname{Arc\,tan} x - x)/2$.

---

12 a

Exercice

a) Notant G une primitive de $g : t \mapsto \operatorname{Arc\,sin}\sqrt{t}$ et H une primitive de $h : t \mapsto \operatorname{Arc\,cos}\sqrt{t}$, on a $f(x) = G(\sin^2 x) + H(\cos^2 x) - G(0) - H(0)$; f est donc dérivable (en tant que somme de composées de fonctions dérivables), ce qui implique qu'elle est continue.

b) Comme $\sin^2(x+\pi) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$, et que $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, on voit que f est π-périodique, de même, $f(\pi - x) = f(x)$. Sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, on a $f'(x) = \sin(2x)(g(\sin^2 x) - h(\cos^2 x))$, or $\sqrt{\cos^2 x} = \cos x$ sur cet intervalle, et donc $h(\cos^2 x) = x$; finalement $f'(x) = 0$ et f est constante sur $[0, \pi/2]$, donc sur $[0, \pi]$ puisque $f(\pi - x) = f(x)$ et finalement sur $\mathbf{R}$ tout entier, par périodicité. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(\pi/2) = \int_0^1 \operatorname{Arc\,sin}\sqrt{t}\,dt$.

c) Soit $\alpha = \operatorname{Arc\,sin} u$, on a donc $0 \le \alpha \le \pi/2$ et $\sin\alpha = u$, donc $\cos\alpha = \sqrt{1-u^2}$ (puisque $\cos\alpha \ge 0$), et finalement $\alpha = \operatorname{Arc\,cos}\sqrt{1-u^2}$, puisque ces deux angles sont dans l'intervalle $[0, \pi/2]$ et ont le même cosinus.

d) Posons $u = 1 - t$, on a donc $\int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arc\,cos}\sqrt{t}\,dt = -\int_1^{\sin^2 x} \operatorname{Arc\,cos}\sqrt{1-u}\,du$; on vient de voir que (pour $u \in [0,1]$) $\operatorname{Arc\,cos}\sqrt{1-u} = \operatorname{Arc\,cos}\sqrt{1-(\sqrt{u})^2} = \operatorname{Arc\,sin}\sqrt{u}$, on a donc $f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arc\,sin}\sqrt{t}\,dt + \int_{\sin^2 x}^1 \operatorname{Arc\,sin}\sqrt{u}\,du = \int_0^1 \operatorname{Arc\,sin}\sqrt{t}\,dt$ (d'après Chasles). [Cette dernière intégrale est calculable en posant $t = \sin^2 u$, ou par intégration par parties ; on obtient par exemple $f(x) = t \operatorname{Arc\,sin}\sqrt{t}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t}} = \pi/4$ (la dernière intégrale nécessitant de plus un passage à la limite), mais l'énoncé ne le demandait pas, et il semble difficile de le trouver dans le temps imparti]

13

Question de cours

Si f est dérivable jusqu'à l'ordre $n+1$ sur un intervalle contenant a et b, il existe c compris entre a et b tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \text{ (Taylor-Lagrange)}$$

que l'on peut réécrire sous la forme $\exists\theta, 0 < \theta < 1$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta(b-a)) \text{ (Mac-Laurin),}$$

d'où, avec $a = 0$ et $b = x$, le DL de Young :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^n \varepsilon(x).$$

Enfin, et en supposant que la dérivée $(n+1)$-ème de f soit continue, on peut exprimer cette formule avec un reste intégral :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Deux suites u et v sont équivalentes (ce que l'on note $u \sim v$ ou $u_n \sim v_n$) s'il existe une suite (ε_n) telle que $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ et que $\lim_{(n\to+\infty)} \varepsilon_n = 0$.

Exercice

a) On obtient successivement $\ln(1+x) = x - x^2/2(1+\theta x)^2$ et $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3(1+\theta x)^3$, avec $0 < \theta < 1$. On déduit aisément de la première formule l'encadrement $x - x^2/2 < \ln(1+x) < x$, valable pour tout $x > 0$.

b) On peut écrire $u_n = e^{v_n}$, avec $v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+k/n^2)$.

c) Additionnant les encadrements obtenus en a), on a donc $\sum_{k=1}^{n}(k/n^2 - k^2/2n^4) < v_n < \sum_{k=1}^{n}(k/n^2)$; comme $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, le théorème des gendarmes montre que v_n converge vers $1/2$ et donc que $\lim u_n = \sqrt{e}$. [Ce n'était pas tout à fait la forme réclamée par l'énoncé, lequel demandait de montrer explicitement que les sommes des restes tendaient vers 0, et il faudrait sans doute justifier à l'oral ce léger écart destiné à alléger la présentation du résultat]

d) On a $\sqrt{e} - u_n = \sqrt{e}(1 - e^{v_n - 1/2})$. On sait que $\sum_{k=1}^{n}(k/n^2 - k^2/2n^4) - 1/2 < v_n - 1/2 < \sum_{k=1}^{n}(k/n^2) - 1/2$, mais cet encadrement n'est pas assez précis pour pouvoir conclure. Utilisant alors l'encadrement résultant de la formule de Taylor à l'ordre suivant, $x - x^2/2 < \ln(1+x) < x - x^2/2 + x^3/3$, un calcul patient (utilisant aussi le fait que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$) montre que $v_n - 1/2 \sim 1/3n$, d'où on déduit (puisque $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$) que $\sqrt{e} - u_n \sim -\sqrt{e}/3n$. [Il ne semble pas raisonnable d'exiger ce calcul dans le temps limité imparti aux candidats, et l'on peut déjà considérer comme très satisfaisant d'avoir vu que l'encadrement de v_n «à l'ordre 1» n'était pas suffisant pour conclure]

14

Question de cours

Si f est continue sur un intervalle contenant a et b, elle admet des primitives sur cet intervalle; notant F une de ces primitives (donc telle que $F'(x) = f(x)$), on appelle intégrale définie de f entre a et b, et l'on note $\int_a^b f(x)\,dx$, le nombre $F(b) - F(a)$.
Posant $t = \tan(x/2)$ (avec $x \neq \pi + 2k\pi$), on a (formules «en t») $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$.
Les règles de Bioche permettent de déterminer des changements de variable efficaces pour intégrer des expressions trigonométriques : si $f(x) = \varphi(\sin x, \cos x)$ est impaire, on utilisera $x = \mathrm{Arc}\cos t$, si $f(\pi - x) = -f(x)$, on utilisera $x = \mathrm{Arc}\sin t$, enfin, si f est π-périodique, on utilisera $x = \mathrm{Arc}\tan t$.

Exercice

a) D'après les règles de Bioche, on a intérêt à utiliser ici $t = \mathrm{Arc}\sin u$ [Même s'il s'avère que l'utilisation directe des formules en t conduit en fait également (et même plus simplement) au résultat demandé, il est quand même logique, compte tenu de la question de cours, de procéder ainsi], obtenant $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\cos t} = \int_0^{\sin x} \frac{du}{1-u^2} = 1/2\ln((1+\sin x)/(1-\sin x))$, ce dernier calcul résultant de la décomposition en éléments simples de $1/(1-u^2) = 1/2(1/(1-u)+1/(1+u))$. Utilisant les formules en t (avec $t = \tan(x/2)$), on voit que $(1+\sin x)/(1-\sin x) = (1+t)^2/(1-t)^2$, donc $I(x) = \ln(1+t/1-t)$. Or on sait que $\tan(a+b) = (\tan a + \tan b)/(1 - \tan a \tan b)$; posant $a = \pi/4$ et $b = x/2$, on en déduit le résultat cherché : $I(x) = \ln(\tan(x/2 + \pi/4))$.

b) [Il semble impossible d'obtenir les formules demandées par des changements de variable astucieux dans l'intégrale*, et il était plus raisonnable, dans le temps imparti, de chercher une solution «algébrique»] Continuant à noter $t = \tan x/2$, on a vu que $y = \ln(1+t/1-t)$; or on sait (et il faut au besoin savoir le redémontrer) que $\mathrm{th}\,X = b \iff X = \mathrm{Arg\,th} b = \ln(1+b/1-b)/2$; on en déduit que $\mathrm{th}\,y/2 = t = \tan x/2$. Il existe une formule de duplication pour th analogue à celle valable pour tan (il fallait peut-être la redémontrer à l'aide de l'exponentielle) : $\mathrm{th}\,2X = 2\,\mathrm{th}\,X/(1+\mathrm{th}^2 X)$; on en déduit donc que $\mathrm{th}\,y = 2t/(1+t^2) = \sin x$, d'après les formules en t. Enfin, on a aussi l'analogue des formules en $t = \mathrm{th}\,y/2$ pour $\mathrm{sh}\,y$ et $\mathrm{ch}\,y$, mais il était plus simple de remarquer que $\mathrm{ch}\,y = 1/(1-\mathrm{th}^2 y)$, puis de faire

---

* On peut en fait y parvenir en remarquant que $f(x) = \mathrm{th}\,y$ a pour dérivée $(1 - f(x)^2)/\cos x$, puis en posant $u(x) = \arcsin f(x)$ et en montrant que $u' = \cos u/\cos x$; comme $u(0) = 0$, on en déduit $u(x) = x$ par unicité des solutions d'équations différentielles...

un calcul direct et d'utiliser une dernière fois les formules en t pour obtenir $\operatorname{ch} y = 1/\cos x$.

15

Question de cours

Si f est dérivable jusqu'à l'ordre $n+1$ sur un intervalle contenant a et b (il suffit d'ailleurs en fait qu'elle ne soit que n fois continuement dérivable en a et b), il existe c compris entre a et b tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \text{ (Taylor-Lagrange, ordre } n\text{)}$$

que l'on peut réécrire sous la forme $\exists \theta, 0 < \theta < 1$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta(b-a)) \text{ (Mac-Laurin),}$$

d'où, avec $a = 0$ et $b = x$, le DL de Young :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^n \varepsilon(x).$$

Enfin, et en supposant que la dérivée $(n+1)$-ème de f soit continue, on peut exprimer cette formule avec un reste intégral :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Exercice

a) Comme $\sin'' = -\sin$, on obtient l'existence d'un c, avec $0 < c < x$, tel que $\sin(x) = x - x^2/2 \sin c$.

b) Ainsi, pour tout k, on aura $\sin(k/n^2) = k/n^2 - k^2/2n^4 \sin c_k$, avec $0 < c_k < k/n^2$ (et donc $0 < \sin c_k < 1$) ; on en déduit que $\sum_{k=1}^{n} k/n^2 - k^2/2n^4 < u_n < \sum_{k=1}^{n} k/n^2$; et comme $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$ et que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, le théorème des gendarmes montre que $\lim u_n = 1/2$.

c) Posant $\theta = 1/n^2$, on voit que u_n est la partie imaginaire de $Z = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta + i \sin k\theta$; utilisant l'exponentielle complexe (ou la formule de Moivre), et posant $z = e^{i\theta}$, on a donc $Z = \sum_{k=0}^{n} z^k = \dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}$, remarquant que $e^{i\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha/2} \sin \alpha/2$, on obtient finalement $u_n = \dfrac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \dfrac{\sin \frac{1}{2n} \sin \frac{n+1}{2n^2}}{\sin \frac{1}{2n^2}}$; comme $\sin u \underset{0}{\sim} u$, on a donc $u_n \sim (1/2n)^2/(1/2n^2) = 1/2$.

16

Question de cours

On dit que P est le développement limité de f à l'ordre n en 0 si P est un polynôme de degré $\leq n$, et si l'on peut écrire $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. On a

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)\\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

(où les fonctions ε vérifient $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$).

On appelle forme canonique du trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$ l'écriture $T(x) = a\left(\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right)$.

Si φ est une bijection dérivable (sur des intervalles convenables), on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Exercice

a) Pour calculer $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - x^2/2}{x(x - \operatorname{sh} x)}$, remarquant (à l'aide du DL_3 de sh) que le dénominateur est un $O(x^4)$, on voit qu'il faudra utiliser un DL_4 du numérateur. De fait, on a $1 - \cos x - x^2/2 = -x^4/24 + x^4\varepsilon_1(x)$ et $x - \operatorname{sh} x = -x^3/6 + x^3\varepsilon_2(x)$, donc $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - x^2/2}{x(x - \operatorname{sh} x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^4/24 + x^4\varepsilon_1(x)}{-x^4/6 + x^4\varepsilon_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1/24 + \varepsilon_1(x)}{-1/6 + \varepsilon_2(x)} = 1/4$.

b) Remarquant d'abord que $2t - t^2 = 1 - (t-1)^2$, on est amené, pour calculer l'intégrale, à utiliser le changement de variable $t = \varphi(u) = 1 + \sin u$, pour $u \in]-\pi/2, \pi/2[$ (et $t \in]0, 2[$), on aura donc $I(x) = \int_1^x \frac{dt}{t(2t - t^2)^{1/2}} = \int_0^{\arcsin(x-1)} \frac{\cos u}{(1 + \sin u)\cos u}\,du = \int_0^{\arcsin(x-1)} \frac{du}{1 + \sin u}$. Cette intégrale s'exprime simplement à l'aide des «formules en t» : posant $t = \tan u/2$ (et donc $u = \varphi(t) = 2\operatorname{Arc}\tan t$), on aura $I(x) = \int_0^{\tan\arcsin(x-1)} \frac{2dt}{(1+t)^2} = 2 - \frac{2}{1+a} = \frac{2a}{1+a}$, avec $a = \tan(\arcsin(x-1)/2)$. Posant $2\alpha = \arcsin(x-1)$, on aura $\sin 2\alpha = x - 1 = 2a/(1+a^2)$, d'où a ; en définitive, on obtient $I(x) = \frac{x - \sqrt{2x - x^2}}{x}$ mais il semblait difficile d'aboutir à cette forme explicite dans le temps imparti, et il était essentiel d'exposer d'abord le plan général à suivre, avant de se lancer dans les calculs...

17

Question de cours

On dit que P est le développement limité de f à l'ordre n en 0 si P est un polynôme de degré $\leq n$, et si l'on peut écrire $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, $g \circ f$ est dérivable en a et l'on a (formule de dérivabilité des fonctions composées) $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.
Si f et g admettent des DL_n ($f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$), et si $P(0) = 0$ (cette dernière condition étant essentielle), alors $g \circ f$ a pour DL_n le polynôme $Q(P(x))$, tronqué à l'ordre n (c'est-à-dire le reste de la division euclidienne de $Q \circ P$ par X^{n+1}).

Exercice

a) f étant composée de deux fonctions dérivables (en fait, de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$), elle est dérivable, et (d'après la formule de dérivation des fonctions composées) $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$.

b) La même formule montre que, posant (pour $x > 0$) $g : x \mapsto \operatorname{Arc\,tan} x + \operatorname{Arc\,tan}(1/x)$, on a $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-1/x^2}{1+1/x^2} = 0$, ce qui prouve que g est constante sur $]0, +\infty[$, et y vaut par conséquent toujours $g(1) = \pi/4 + \pi/4 = \pi/2$.

c) On sait que $\operatorname{Arc\,tan} u \underset{0}{\sim} u$ (puisque, par exemple, pour toute fonction h dérivable en 0, on a $h(x) = h(0) + xh'(0) + x\varepsilon(x)$) ; la relation précédente montre donc que $\pi/2 - \operatorname{Arc\,tan} 1/u \underset{0}{\sim} u$, et donc que $\pi/2 - \operatorname{Arc\,tan} v \underset{+\infty}{\sim} 1/v$. Comme $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, posant $v = e^x$, on en déduit donc que $\pi/2 - f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$.

d) On ne peut pas utiliser la composition des DL pour obtenir simplement un DL_3 de f en 0, puisque $\lim_{x\to 0} e^x = 1 \neq 0$. Utilisant alors la formule de Young (puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$), on obtient, après un calcul laborieux des dérivées successives de f, le développement limité $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{12} + x^3\varepsilon(x)$ (il fallait surtout ne pas tomber dans le piège de la composition des DL, il n'est pas certain que cela vaille la peine de terminer le calcul explicite, et en tout cas ne pas perdre de temps à le préparer à l'écrit).

e) Par intégration par parties, on a $\displaystyle\int_0^x e^{2t}f(t)\,dt = e^{2t}f(t)/2\Big|_0^x - \int_0^x \frac{e^{3t}}{2(1+e^{2t})}\,dt$, et cette dernière intégrale devient, après le changement de variable $t = \varphi(u) = \ln u$, $\displaystyle\int_1^{e^x} \frac{u^2}{2(1+u^2)}\,du = \int_1^{e^x} \frac{u^2+1-1}{2(1+u^2)}\,du$; finalement, on obtient

$$\int_0^x e^{2t}f(t)\,dt = \frac{(e^{2x}+1)\operatorname{Arc\,tan} e^x + 1 - e^x}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

17 a

Exercice

a) On sait que $\operatorname{Arc}\tan x = x - x^3/3 + x^3\varepsilon_1(x)$ et que $\sin x = x - x^3/6 + x^3\varepsilon_2(x)$; comme $\sin(0) = 0$, on a le droit de composer les DL (contrairement à la situation de l'exercice **17**), obtenant $f(x) = x - x^3/2 + x^3\varepsilon(x)$ (comme le signalait l'énoncé, il ne fallait pas chercher à simplifier $f(x)$... d'autant que la chose est impossible.

b) f est évidement impaire, dérivable, et sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$; $f(\pi - x) = f(x)$; comme f est 2π-périodique, on en déduit que le graphe de f possède des centres de symétrie en $(k\pi, 0)$ et des axes de symétries de la forme $[X = \pi/2+k\pi]$. On sait que si $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, et si $t = \tan\alpha$, ona $1+t^2 = 1/\cos\alpha$, et donc $\cos\alpha = 1/\sqrt{1+t^2}$ et $\sin\alpha = t/\sqrt{1+t^2}$; on en déduit que $\cos(f(x)) = (1+\sin^2 x)^{-1}$ et que $\sin(f(x)) = \sin x/\sqrt{1+\sin^2 x}$.

c) Intégrant par parties, on a $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x f(x)\,dx = f(\pi/2) - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \pi/4 - J$, avec $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$, qu'on peut réécrire $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2x}{3-\cos 2x}\,dx$, d'où $J = \left.\dfrac{\ln(3-\cos 2x)}{2}\right|_0^{\pi/2} = \ln 2/2$ et finalement $I = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln 2}{2}$.

18

Question de cours

Une suite $u = (u_n)$ est croissante si, pour tout n, $u_n \leq u_{n+1}$; elle est décroissante si, pour tout n, $u_n \geq u_{n+1}$; elle est minorée s'il existe un nombre m tel que pour tout n, $u_n \geq m$ (on dit alors que m est un minorant de la suite).
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$; le théorème des accroissements finis affirme qu'il existe $c \in\,]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On en déduit l'inégalité des accroissements finis : si f est dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$, et que sa dérivée y est bornée (il existe m et M tels que pour tout $x \in \mathcal{I}$, $m \leq x \leq M$), alors on a pour tous a et b de $\mathcal{I}$ l'encadrement $m|b-a| \leq |f(b) - f(a) \leq M|b-a|$.

Exercice

a) g est dérivable, de dérivée $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$; elle est donc strictement décroissante, donc injective, et comme $\lim\limits_{-\infty} g = +\infty$ et que $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'elle est surjective; g est donc une bijection de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$. En particulier, il existe un antécédent et un seul à 0, $\ell = g^{-1}(0)$, tel que $g(\ell) = e^{-\ell} - \ell = 0$, et donc que $\ell = e^{-\ell}$.

b) Comme $g(1) = 1/e - 1 < 0$, on voit que $\ell < 1$. Comme $h : x \mapsto e^{-x}$ est décroissante, on aura $h(1/e) > h(1) = 1/e$, donc $g(1/e) > 0$, ce qui montre que $\ell \in \mathcal{I} =]1/e, 1[$. Pour tout $x \in \mathcal{I}[1/e, 1]$, $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow h(1) = 1/e \leq h(x) \leq h(0) = 1$, donc $h(x) \in \mathcal{I}$; comme $u_0 \in \mathcal{I}$, par récurrence immédiate, on aura $u_n \in \mathcal{I}$ pour tout n.

c) Sur l'intervalle $\mathcal{I}$, on a $|h'(x)| < e^{-1/e}$. On a montré à la question précédente que ℓ et u_n appartiennet à $\mathcal{I}$; appliquant l'inégalité des accroissements finis à $a = \ell$ et $b = u_{n-1}$, on a $|h(b) - h(a)| = |u_n - \ell| \leq e^{-1/e}|u_{n-1} - \ell|$; une dernière récurrence facile (mais qu'il fallait sans doute présenter soigneusement à l'oral) montre alors que (pour tout n) $|u_n - \ell| \leq (e^{-1/e})^n |u_0 - \ell|$, et comme $e^{-1/e} < 1$, le membre de droite converge vers 0; il en est donc de même de $|u_n - \ell|$, ce qui montre que la suite (u_n) converge vers ℓ.

19

Question de cours

Une suite (u_n) monotone ((u_n) est croissante ou (u_n) est décroissante) converge si et seulement si elle est bornée (plus précisément, par exemple, si (u_n) est croissante majorée, elle converge vers sa borne supérieure, et sinon, elle diverge vers $+\infty$).
Si f est continue sur un intervalle contenant a et b, elle admet des primitives sur cet intervalle; notant F une de ces primitives (donc telle que $F'(x) = f(x)$), on appelle intégrale définie de f entre a et b, et l'on note $\int_a^b f(x)\,dx$, le nombre $F(b) - F(a)$.
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$; le théorème des accroissements finis affirme qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Exercice

a) On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{2n+2+2n+1-4n-2}{(2n+1)(2n+2)} = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$, ce qui montre que la suite est croissante. Comme, pour tout k tel que $n+1 \leq k$, on a $1/k < 1/n$, on a donc $u_n < \sum\limits_{k=n+1}^{2n} 1/n = 1$. La suite (u_n) étant croissante majorée, elle converge donc vers une limite $a \leq 1$.

b) On sait (formule de la moyenne) que si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, $(b-a) \min\limits_{x \in [a,b]} f(x) \leq \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq (b-a) \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ (compte tenu des questions de cours, il fallait peut-être le redémontrer en utilisant le théorème des accroissements finis). Prenant successivement $[a, b] = [k-1, k]$ et $[a, b] = [k, k+1]$ (intervalles où $f : t \mapsto 1/t$ est décroissante), on voit que cela entraîne que $\dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k-1}$ et que $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$, d'où l'encadrement demandé.

c) Additionnant les encadrements précédents, et utilisant la relation de Chasles, on obtient $\displaystyle\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \int_n^{2n} \frac{dt}{t}$, donc $\ln \dfrac{2n+1}{n+1} \leq u_n \leq \ln 2$; comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} = 2$, le théorème des gendarmes permet donc de conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln 2$.

d) On pouvait remarquer (par décalage) que $u_n = \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K+n} = \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{1+(K/n)}$; on reconnait là une somme de Riemann (de pas $1/n$) associée à la fonction $g : x \mapsto 1/(x+1)$ sur l'intervalle $[0,1]$ (ici encore, il était sans doute bon de rappeler la formule générale des sommes de Riemann : $S_2(f;a,b,n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$); g étant continue sur cet intervalle, on sait que la suite u_n converge vers $\int_0^1 g(x)\,dx = \ln 2$.

20

Question de cours

Une suite (u_n) est croissante si, pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$; elle est décroissante si, pour tout n, $u_{n+1} \leq u_n$. Pour étudier le sens de variation d'une suite, on étudie donc en général le signe de $u_{n+1} - u_n$, ou parfois, et si $u_n)$ est positif, on compare u_{n+1}/u_n à 1.
Une suite (u_n) monotone ((u_n) est croissante ou (u_n) est décroissante) converge si et seulement si elle est bornée (plus précisément, par exemple, si (u_n) est croissante majorée, elle converge vers sa borne supérieure, et sinon, elle diverge vers $+\infty$).

Si u_n et v_n convergent vers al même limite a, et si, pour tout n, $u_n \leq w_n \leq v_n$, alors w_n converge également vers a («théorème des gendarmes»).

Exercice

a) Pour tout k tel que $n+1 \leq k$, on a $1/k^2 < 1/n^2$; on a donc $u_n < \sum_{k=n+1}^{2n} 1/n^2 = 1/n$. La suite (u_n) étant encadrée par la suite nulle et par la suite de terme général $1/n$, convergeant vers 0, elle converge donc elle aussi vers 0, d'après le théorème des gendarmes.

b) On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+2)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{(2n+2)^2 + (2n+1)^2 - 4(2n+1)^2}{(2n+1)^2(2n+2)^2} \\ &= \frac{1 - 4n - 8n^2}{(2n+1)^2(2n+2)^2} < 0 \end{aligned}$$

(puisque $n \geq 1$), ce qui montre que (u_n) est décroissante.

c) On sait (formule de la moyenne) que si f est continue sur l'intervalle $[a,b]$, $(b-a)\min_{x\in[a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq (b-a)\max_{x\in[a,b]} f(x)$. Prenant successivement $[a,b] = [k-1,k]$ et $[a,b] = [k,k+1]$ (intervalles où $f : t \mapsto 1/t^2$ est décroissante), on voit que cela entraîne que $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{(k-1)^2}$ et que $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$, d'où l'encadrement demandé.

d) Additionnant les encadrements précédents, et utilisant la relation de Chasles, on obtient $\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{t^2} \le \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} \le \int_n^{2n} \frac{dt}{t^2}$, donc $\frac{n}{(n+1)(2n+1)} \le u_n \le \frac{1}{2n}$; comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} = 1$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty} 2nu_n = 1$, et donc que $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

21

Question de cours

f est continue en a si f est définie en a et au voisinage de a, et si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
f est dérivable en a si (dans les mêmes conditions) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.
Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 (c'est-à-dire qu'on peut écrire $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$, où P est un polynôme de degré $\le n$, et où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$), on a $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x P(t)\,dt + x^{n+1}\varepsilon_1(x)$, où $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$, ce qui revient à dire qu'on peut «intégrer les DL».

Exercice

a) On sait que $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^2\varepsilon(x)$, on en déduit que (pour $x \ne 0$) $f(x) = 1/(1+x/2+x\varepsilon(x))$ et donc que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$, ce qui montre que f est continue en 0. Pour $x \ne 0$, on a $(f(x)-1)/x = (-1/2-\varepsilon(x))/(1+x/2+x\varepsilon(x))$ et donc $\lim_{x\to 0}(f(x)-1)/x = -1/2$, ce qui montre que f est dérivable en 0 (on pouvait donc se passer de la démonstration précédente, puisque dérivable implique continue) et que $f'(0) = -1/2$.

b) On a (pour $x \ne 0$) $f'(x) = (e^x - 1 - xe^x)/(e^x-1)^2$; une brève étude de la fonction $g : x \mapsto e^x - 1 - xe^x$, de dérivée $g'(x) = -xe^x$, donc croissante sur $]-\infty, 0[$ jusqu'à $g(0) = 0$ et décroissante ensuite, montre que f' est toujours négative, et donc que f est strictement décroissante ; comme $\lim_{-\infty} f = +\infty$ et que $\lim_{+\infty} f = 0$, f est une bijection de $\mathbf{R}$ vers $]0, +\infty[$. On voit facilement que $\mathcal{G}_f$ admet $[Y = -X]$ comme direction asymptotique en $-\infty$; comme $\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} xe^x/(e^x-1) = 0$, on a finalement la droite $[Y = -X]$ (la deuxième bissectrice) asymptote à $\mathcal{G}_f$, et le graphe est au dessus de l'asymptote, puisque $f(x) + x > 0$.

c) On montre (à l'aide d'un calcul patient utilisant la formule $1/(1+u) = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\varepsilon(u)$) que $f(x) = 1/(1 + x/2 + x^2/6 + x^3/24 + x^3\varepsilon(x)) = 1 - x/2 + x^2/6 + x^3\varepsilon_1(x)$ (ce calcul n'était en fait sans doute pas réalisable dans le temps de l'exercice, et il fallait simplement se contenter d'en indiquer le principe) ; la règle énoncée dans la question de cours permet d'en déduire que $\int_0^x f(t)\,dt = x - x^2/4 + x^3/18 + x^4\varepsilon_2(x)$.

22

Question de cours

Si f est continue sur un intervalle contenant a et b, elle admet des primitives sur cet intervalle ; notant F une de ces primitives (donc telle que $F'(x) = f(x)$), on appelle intégrale définie de f entre a et b, et l'on note $\int_a^b f(x)\,dx$, le nombre $F(b) - F(a)$.
Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, $g \circ f$ est dérivable en a et l'on a (formule de dérivabilité des fonctions composées) $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$; le théorème des accroissements finis affirme qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Exercice

a) Notons $g : t \mapsto 1/(1 + \ln^2 t)$, g est continue (en fait, de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $]0, +\infty[$, et y admet par conséquent des primitives ; notons G l'une d'entre elles. Par définition, on aura alors $F(x) = G(2x) - G(x)$, et F, composée de fonctions dérivables, sera également dérivable ; on aura d'ailleurs $F'(x) = 2g(2x) - g(x) = \dfrac{2}{1 + \ln^2 2x} - \dfrac{1}{1 + \ln^2 x}$ du signe du numérateur $N(x) = 1 + 2\ln^2 x - (\ln 2 + \ln x)^2$. Posant $X = \ln x$, on a $N(x) = X^2 - (2\ln 2)X + (1 - \ln^2 2)$, trinôme de discriminant réduit $2\ln^2 2 - 1$, négatif puisque $\ln^2 2 < 1/2$; en définitive, $N(x)$ est toujours positif et F est donc strictement croissante. La difficulté de cet exercice est considérable, dans la mesure où seule la valeur exacte de $\ln 2 \simeq 0,693$ permet de déterminer le signe de $F'(x)$; il était difficile de rester calme et de ne pas soupçonner une erreur de calcul... Le candidat sérieux avait tout intérêt à demander cette valeur numérique, ce qui lui permettait aussi de se rassurer.

b) Comme, pour tout $x \in D_F$, on a $x < 2x$, on aura, en appliquant à G le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x, 2x]$, l'existence d'un c tel que $x < c < 2x$ et que $g(c) = F(x)/x$ (ce résultat est aussi conséquence de la formule de la moyenne, mais l'esprit de l'énoncé déconseillait cette approche). Si alors x tend vers $+\infty$, g étant décroissante sur $[1, +\infty[$, on en déduit que $xg(2x) < F(x) < xg(x)$, et comme $g(x) = 1 + \ln^2 x \underset{+\infty}{\sim} \ln^2 x$, et donc que $g(x) \underset{+\infty}{\sim} g(2x)$, le théorème des gendarmes montre que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} x/(\ln x)^2$; près de 0, on a cette fois $xg(x) < F(x) < xg(2x)$, mais les mêmes équivalents étants vrais en 0, on obtient tout de même $F(x) \underset{0}{\sim} x/(\ln x)^2$.

c) On a donc $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = \lim\limits_{x \to 0} x/(\ln x)^2 = 0$; prolongeant F par $F(0) = 0$, la nouvelle fonction ainsi obtenue a par définition un nombre dérivé en 0 égal à $\lim\limits_{x \to 0} F(x)/x = \lim\limits_{x \to 0} 1/(\ln x)^2 = 0$; cette limite existant (et étant finie), F ainsi prolongée est bien dérivable en 0.

d) De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)/x = 0$, et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$, le graphe de F admet une branche parabolique d'axe Ox en $+\infty$.

23

Question de cours

Si f est continue sur un intervalle contenant a et b, elle admet des primitives sur cet intervalle; notant F une de ces primitives (donc telle que $F'(x) = f(x)$), on appelle intégrale définie de f entre a et b, et l'on note $\int_a^b f(x)\,dx$, le nombre $F(b) - F(a)$.
Si φ est une bijection dérivable (sur des intervalles convenables), on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Si $a < b$, et si pour tout t de l'intervalle $[a, b]$, on a $f(t) \leq g(t)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$. De plus, si les deux intégrales sont égales, et si les fonctions sont continues sur $[a, b]$, on aura $f(t) = g(t)$ pour tout t de $[a, b]$.

Exercice

a) $\displaystyle I_0 = \int_1^e t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_1^e = \frac{e^3-1}{3}$. $\displaystyle I_1 = \int_1^e t^2 \ln t\,dt =$ (par intégration par parties) $\displaystyle \frac{t^3 \ln t}{3}\Big|_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{3}\,dt = \frac{t^3(3\ln t - 1)}{9}\Big|_1^e = \frac{2e^3+1}{9}$.

b) Utilisant le changement de variable $t = \varphi(u) = e^u$ (et donc $u = \varphi^{-1}(t) = \ln t$), on obtient $\displaystyle I_n = \int_{\ln 1}^{\ln e} e^{2u}(\ln(e^u))^n e^u\,du = \int_0^1 t^n e^{3t}\,dt$.

c) Et comme, pour tout t de l'intervalle $[0, 1]$, on a $0 \leq t^n e^{3t} \leq t^n e^3$, l'intégration des inégalités montre que $\displaystyle 0 \leq I_n \leq \int_0^1 e^3 t^n\,dt = \frac{e^3}{n+1}$; d'après le théorème des gendarmes, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

d) On a $\displaystyle I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1}e^{3t}\,dt = \frac{t^{n+1}e^{3t}}{3}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{(n+1)t^n e^{3t}}{3}\,dt$ (par intégration par parties), et donc $\displaystyle I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$. Passant à la limite (en faisant tendre n vers $+\infty$), on en déduit donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n+1)I_n/3 = e^3/3$ et finalement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = e^3$.

24

Question de cours

Si $a < b$, et si pour tout t de l'intervalle $[a, b]$, on a $f(t) \leq g(t)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$. De plus, si les deux intégrales sont égales, et si les fonctions sont continues sur $[a, b]$, on aura $f(t) = g(t)$ pour tout t de $[a, b]$.

Si f et g sont continues sur $[a, b]$, notant F et G deux de leurs primitives respectives, on a (formule d'intégration par parties)

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(x)g(x)\,dx.$$

Si φ est une bijection dérivable (sur des intervalles convenables), on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Exercice

a) $I_0 = \int_0^{\pi/4} dt = \pi/4$; $I_1 = \int_0^{\pi/4} \tan^2 t\,dt = \int_0^{\pi/4} 1 + \tan^2 t\,dt - I_0 = \tan(\pi/4) - I_0 = 1 - \pi/4$.

b) Posant $t = \varphi(u) = \operatorname{Arc}\tan u$ (et donc $u = \varphi^{-1}(t) = \tan t$), on obtient $I_n = \int_{\tan 0}^{\tan \pi/4} (\tan(\operatorname{Arc}\tan u))^{2n}(1/1 + u^2)\,du = \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^2}\,du$. Or, pour tout u positif, on a $0 \leq u^{2n}/(1 + u^2) \leq u^{2n}$, donc, par intégration des inégalités, on aura $0 \leq I_n \leq \int_0^1 u^{2n}\,du = 1/(2n + 1)$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim I_n = 0$.

c) Remarquant que $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{u^{2n+2}}{1+u^2}\,du = \int_0^1 \frac{u^{2n+2} + u^{2n} - u^{2n}}{1+u^2}\,du$, on voit que $I_{n+1} = \frac{1}{2n+1} - I_n$. Posant $u_n = (-1)^n I_n$, on a $u_{n+1} = (-1)^{n+1} I_{n+1} = (-1)^{n+1}/(2n + 1) - (-1)^{n+1} I_n = (-1)^{n+1}/(2n + 1) + u_n$, d'où $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1}/(2k + 1)$, et finalement (pour $n \geq 1$)

$$I_n = (-1)^n \left(\frac{\pi}{4} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \right);$$

compte tenu du résultat précédent, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.