Les devoirs-maisons sont proposés aux élèves sur la base d'un par 10 jours (soit environ 20 devoirs dans l'année). Ils doivent en faire au moins un sur deux (ou, par exemple, se mettre en binôme et les faire tous). L'objectif est de s'entraîner au travail de «recherche»; je suggère, par exemple, de consacrer typiquement 8 à 10 heures à chaque devoir, mais pas plus. Je donne ici 8 exemples caractéristiques, avec les corrigés qui sont ensuite remis aux élèves (et qui essaient de se rapprocher d'une rédaction complète).

Devoir n° 1

La méthode de Cardan

On veut résoudre l'équation «générale» du troisième degré :

$$(\star) \qquad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

(x inconnue réelle; a, b, c, d constantes réelles; a non nul).

1 Par un changement d'inconnue de la forme $X = x + A$, montrer qu'on peut se ramener à une équation de la forme :

$$(\star\star) \qquad X^3 = pX + q$$

(où p, q, et A sont des constantes, dépendant de a, b, c et d, et que l'on précisera)

Application numérique : à quoi se ramène-t-on si $(\star)$ est : $8x^3 - 24x^2 + 40x - 33 = 0$?

2 On introduit une nouvelle inconnue u telle que $X = u + \dfrac{p}{3u}$. Montrer qu'alors l'équation $(\star\star)$ se ramène à une équation de degré 6, elle-même ramenable à une équation du second degré (notée $(\star\star\star)$) à l'aide d'un nouveau changement d'inconnue. Cette équation a-t-elle toujours des solutions réelles ?

3 Étudier d'abord le cas où 0 est solution de $(\star\star\star)$. Est-ce un inconvénient en pratique ?

4 Vérifier que, lorque $(\star\star\star)$ admet deux solutions non nulles, il leur correspond une valeur unique de X, et que cette valeur est solution de $(\star\star)$. La réciproque est-elle vraie ? En définitive, risque-t-on d'introduire des solutions parasites, ou au contraire, de ne pas trouver de solutions alors qu'il en existerait (on justifiera soigneusement l'analyse) ?

5 Résoudre complètement l'équation $(\star\star)$ dans le cas : $p = -2$, $q = 9/8$. (Si vous avez utilisé une méthode différente de celle proposée en **2**, comparez les deux solutions). En déduire la solution de l'application numérique de **1** ; on remarquera éventuellement l'apparition de «formules» très compliquées, mais dont la valeur numérique semble simple; que faut-il en penser ?

6 On se propose d'étudier plus précisément l'existence (et le nombre) des solutions de $(\star\star)$. Pour cela, étudier (brièvement) les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x) = x^3 - px - q$; déterminer en particulier soigneusement la valeur des extremums (les maximums et les minimums) de f. Que peut-on conclure sur le nombre de solutions de $(\star\star)$?

7 C'est cette démarche qui a conduit, vers 1550, à la découverte des nombres complexes. Montrer comment, par exemple, dans le cas $p = 3$, $q = 0$, on est amené à des valeurs complexes de u, alors qu'il y a trois racines réelles «évidentes» ! Pouvez-vous esquisser la solution dans ce cas, en essayant de «généraliser» aux complexes la notion de racine cubique (on pourra commencer par remarquer que $(-i)^3 = i$, puis essayer de résoudre l'équation $z^3 = i$) ?

Devoir n° 2

Racines de l'unité : la formule des « sommes de Gauss »

1 Résoudre (dans $\mathbf{C}$) l'équation $z^7 = 1$ (rappeler brièvement la méthode utilisée); on appelle u la solution de parties réelles et imaginaires strictement positives (on vérifiera qu'il n'y en a qu'une). Exprimer toutes les solutions sous forme de puissances de u; tracer l'image des solutions dans le plan complexe (on ne demande pas une construction exacte).

2 Factoriser (à l'aide de u) le polynôme $P(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

3 On pose $a = u+u^2+u^3$. Remarquer que $P(u) = 0$, et en déduire que $\Re(a) = -1/2$. Y-a-t-il une interprétation géométrique de ce résultat ? En déduire une relation entre $\cos 2\pi/7$, $\cos 4\pi/7$ et $\cos 6\pi/7$. Posant $\alpha = 2\pi/7$, et utilisant les formules de duplication et de triplication (donnant $\cos 2\alpha$ et $\cos 3\alpha$ en fonction de $\cos\alpha$), montrer que $X = \cos\alpha$ est racine d'un polynôme du 3ème degré à coefficients entiers, et déterminer les autres racines de ce polynôme.

4 On pose à présent $s = 1 + u + u^4 + u^9 + u^{16} + u^{25} + u^{36}$ (en utilisant les notations du chapitre 5, on a donc $s = \sum_{k=0}^{6} u^{k^2}$). Simplifier l'écriture de s et le calculer (numériquement, c'est-à-dire en utilisant les valeurs (à 10^{-9} près) des cos et sin des angles obtenus en **1**). Que constate-t-on ?

5 Montrer (directement) que $s - 2a - 1$ est imaginaire pur; calculer s^2 (sous forme de somme de puissances de u); vérifier que s^2 est bien un entier négatif.

6 On veut généraliser ce résultat au cas $z^n = 1$. On appelle à présent u la solution de « plus petit argument » (non nul). Déterminer, pour $n = 3$, 4, 5 et 6, la valeur de l'analogue de s (ce nombre, $s(n) = \sum u^{k^2}$, avec k variant entre des bornes qu'on précisera, s'appelle une « somme de Gauss »); vous utiliserez les valeurs « exactes » de u déterminées en cours; si votre « analogie » est correcte, vous devriez obtenir (pour n impair) des formules assez simples. Écrire un programme permettant de calculer numériquement $s(n)$; contrôler que $s(102) = 0$, et que $s(121) = 11$. Étudier la liste des valeurs calculées (pour $10 \leq n \leq 100$, par exemple); quelle conjecture peut-on formuler ? La vérifier (rigoureusement, sans passer par des valeurs approchées) pour $n = 9$. Pensez-vous que l'établissement de cette liste de valeurs constitue une démonstration ? Sinon, que faudrait-il faire de plus ?

Devoir n° 3

L'inéquation $a^x \geq x$

1 Étudier (brièvement) la fonction $f_a : x \mapsto f_a(x) = a^x - x$, où a est une constante (positive) ; on distinguera soigneusement les différents cas possibles.

2 Montrer que si $a < 1$, l'équation $f_a(x) = 0$ possède une solution unique, que l'on notera $s(a)$, et qui est comprise entre a et 1 (on admettra que le théorème des valeurs intermédiaires s'applique à f_a).

En déduire la résolution de l'inéquation $a^x \geq x$, quand $a < 1$.

3 Montrer que $s(a)$ est une fonction (strictement) croissante de a (on pourra raisonner graphiquement en utilisant par exemple les graphes de a^x et b^x, avec $a < b < 1$, mais on rédigera dans tous les cas un raisonnement rigoureux utilisant des inégalités)

4 On étudie à présent le cas $a > 1$. Déterminer la valeur du minimum de $f_a(x)$; en déduire l'existence d'un nombre $a_0 > 1$ pour lequel l'équation $f_a(x) = 0$ possède une solution unique. Déterminer la nature des solutions de l'inéquation $a^x \geq x$ (par exemple le nombre d'intervalles...) pour $a > 1$ (on distinguera les cas $a > a_0$ et $a < a_0$)

5 Peut-on définir encore une fonction analogue à $s(a)$? On étudiera éventuellement ses variations, en s'inspirant de **3**.

6 Résoudre («exactement») l'équation $a_0^x = x$.

7 Montrer (brièvement) que l'étude de la fonction $g(x) = \ln x/x$ redonnerait les mêmes résultats ; exprimer $s(a)$ à l'aide de la bijection réciproque g^{-1} d'une restriction convenable de g. Comment faut-il adapter cette «formule» au cas étudié en **5** ?

8 Utiliser une méthode analogue pour résoudre l'équation $a^x = x^a$; en déduire l'existence d'un couple d'entiers (m, n) (avec $m < n$) unique tel que $m^n = n^m$.

Devoir n° 4

La règle de l'Hospital

1 Soit deux fonctions f et g dérivables en 0, telles que $f(0) = g(0) = 0$, et que $g'(0) \neq 0$. Montrer que $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = f'(0)/g'(0)$. Par changement de variable, obtenir une formule analogue (sous des hypothèses qu'on précisera) quand x tend vers a. Pourquoi la condition $f(0) = g(0) = 0$ est-elle nécessaire ? Est-ce un inconvénient en pratique ?

2 La « règle de l'Hospital » s'énonce généralement ainsi : si $\lim_a f = \lim_a g = 0$, et si f et g sont dérivables, $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$. Montrer que cette règle est plus générale que celle de **1**.

3 La formule des accroissements finis donne $(\exists c \in [0;x])(f'(c) = (f(x) - f(0))/x)$ (pour des x assez proches de 0). Pourquoi ne peut-on pas alors démontrer la règle de l'Hospital par un simple calcul du type $f'(c)/g'(c) = f(x)/g(x)$, suivi d'un passage à la limite ?

4 On va démontrer un résultat général, appelé la « formule des accroissements finis généralisée », et permettant le calcul précédent : Si f et g sont dérivables sur $]a,b[$ et continues sur $[a,b]$, et si $g(b) \neq g(a)$, il existe un c tel que $a < c < b$ et que

$$(\star) \qquad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Pour démontrer ce résultat, on va d'abord construire une fonction auxiliaire h, de la forme $Af + Bg$ (A et B constantes), et telle que $h(a) = h(b)$. Montrer qu'en appliquant le lemme de Rolle à une fonction h quelconque vérifiant ces hypothèses, on peut conclure qu'il existe un c tel que $f'(c)/g'(c) = -B/A$, ou tel que $f'(c) = g'(c) = 0$. Démontrer alors la formule $(\star)$ à l'aide d'une fonction h bien choisie (on admettra que le cas $g'(c) = 0$ ne se produit pas).

5 En supposant toujours que les fonctions f et g sont dérivables sur $]a,b[$ et continues sur $[a,b]$, et en appliquant la formule précédente, montrer que si $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, il en est de même de $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$ et qu'alors ces deux limites sont égales (on essaiera d'expliquer clairement ce qui se passe pour les « exceptions » : $g(a) = g(b)$ et $f'(c) = g'(c) = 0$) ; reformuler rigoureusement la règle de l'Hospital donnée en **2**. Y a-t-il une différence ? Donner un exemple de fonctions f et g vérifiant les hypothèses faites (en particulier $\lim_a f = \lim_a g = 0$) et telles que $\lim_a f/g$ existe, et pas $\lim_a f'/g'$.

6 Il peut arriver que la limite de f'/g' soit à son tour une forme indéterminée du type « 0/0 » ; rédiger une « règle généralisée » utilisant les dérivées $n^{\text{èmes}}$ (on précisera les conditions nécessaires). Peut-on encore généraliser au cas où $a = +\infty$?

7 Appliquer la règle de l'Hospital (éventuellement généralisée) pour déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{1}{2(1 - \sqrt{x})} - \frac{1}{3(1 - \sqrt[3]{x})}$$

8 Démontrer (par récurrence) que $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}}{x^{n+1}} = \dfrac{1}{(n+1)!}$. Chercher une formule analogue pour une expression de la forme $(\ln(x+1) - P_n(x))/x^{n+1}$, où P_n est un polynôme de degré n que l'on déterminera.

Devoir n° 5

La fonction Beta d'Euler

On pose $\mathsf{B}(u,v) = \displaystyle\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$ (qu'Euler a appellé la fonction Beta). On précisera les valeurs de u et v pour lesquelles l'intégrale est définie, et l'on supposera que l'on est dans ce cas jusqu'à l'avant-dernière question.

1 Montrer que $\mathsf{B}(u,v) = \mathsf{B}(v,u)$ et que $\mathsf{B}(u,v) = \mathsf{B}(u,v+1) + \mathsf{B}(u+1,v)$.

2 A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre $\mathsf{B}(u+1,v)$ et $\mathsf{B}(u,v)$; en déduire la valeur de $\mathsf{B}(n,p)$ pour n élément de $\mathbf{N}^*$ et l'exprimer à l'aide de factorielles quand p est également entier. Développer $x^N(1-x)^P$ par la formule de Newton et intégrer directement ; quelle propriété des coefficients binomiaux obtient-on ?

3 Calculer $\mathsf{B}(3/2,3/2)$. Utiliser les questions précédentes pour donner un sens à $(1/2)!$ (contrôler votre réponse à l'aide d'une calculette acceptant $x!$ pour x réel, ou de Maple)

4 Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x\,dx$ à l'aide de la fonction B (avec des u et v bien choisis). La formule ainsi obtenue est-elle définie pour tous les p et q positifs ? Expliquer cette contradiction apparente.

5 A l'aide de la question précédente, « calculer » la valeur de $I = \mathsf{B}(1/2,1/2)$. Montrer que $I = \displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{1-x} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$.

6 Utiliser un raisonnement analogue pour déterminer le domaine d'existence de la fonction B^* définie par $\mathsf{B}^*(u,v) = \displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{1-x} t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$. (On pensera à encadrer par des fonctions plus simples au voisinage de 0 par exemple). Pourquoi est-ce un prolongement de B ? Montrer que B^* vérifie les relations obtenues en **1** et **2** ; les utiliser pour prolonger encore B^* à $u \leq 0$ par exemple. Pensez-vous que ce prolongement corresponde encore à une intégrale ?

Devoir n° 6

Puissances de matrices

On se place dans ce problème dans un anneau $(A, +, \star)$ quelconque, mais on ne s'intéressera plus à partir de la question **4** qu'à l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), +, \times)$ des matrices carrées réelles d'ordre n, qu'on notera simplement $\mathcal{M}_n$. Pour tout élément x de A, et tout $k \in \mathbf{N}^*$, on note x^k le «produit» $\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{k \text{ fois}}$ (plus précisément, x^k est défini par récurrence par $x^1 = x$ et $x^{n+1} = x^n \star x$) ; on adopte de plus la convention $x^0 = 1_A$. On dit qu'un élément x de A est *nilpotent* s'il existe un entier $k > 0$ tel que $x^k = 0_A$, et qu'il est *unipotent* s'il existe un entier $k > 0$ tel que $x^k = 1_A$.

1 Traduire ces définitions dans le langage des matrices : quand dira-t-on qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est nilpotente ? Quand dira-t-on qu'elle est unipotente ? (on rappelle que O_n et I_n désignent respectivement les matrices nulle et unité de $\mathcal{M}_n$).

2 Montrer que tout élément unipotent est inversible, et qu'aucun élément nilpotent ne l'est.

3 Montrer que si y est inversible, et si x est idempotent ou nilpotent, $y \star x \star y^{-1}$ est (respectivement) idempotent ou nilpotent.

4 Expliciter les matrices triangulaires supérieures d'ordre 2 qui sont unipotentes ou nilpotentes (on commencera par déterminer les éléments de la diagonale). Cette analyse se généralise-t-elle au cas des matrices de $(\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$?

5 La question précédente permet d'obtenir (dans $(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}))$ certaines solutions de l'équation $X^2 = O_2$. Calculer alors $(X + aI_2)^2$ (où a est une constante réelle); en déduire une famille de solutions de l'équation $Y^2 = 2Y$. Réciproquement, peut-on, à partir d'une solution de cette équation, obtenir une matrice nilpotente ?

6 Soit A une matrice (nilpotente) telle que $A^3 = O_n$. Montrer qu'on peut écrire $(I_n + A)^k$ sous la forme $I_n + a_k A + b_k A^2$. Expliciter a_k et b_k.

7 Soit A une matrice nilpotente. Calculer le produit $(I_n + A + A^2 + \cdots + A^p)(I - A)$, et en déduire (en prenant une valeur de p convenable) que la matrice $I_n - A$ est inversible. Qu'en est-il de $I_n + A$? Le même argument s'applique-t-il si A est unipotente ?

8 Soit A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. A l'aide de la formule du binôme (pour un exposant assez grand), montrer que $A + B$ est nilpotente. Montrer par un contre-exemple que la condition $AB = BA$ est nécessaire (on pourra utiliser une matrice antisymétrique d'ordre 2, par exemple)

9 Soit A une matrice (nilpotente) telle que $A^k = 0$. On pose $\exp(A) = I_n + A + A^2/2! + A^3/3! + \cdots + A^{k-1}/(k-1)!$. Justifier la notation en montrant que si A et B sont deux matrices (nilpotentes) qui commutent, $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. En déduire que $\exp(A)$ est une matrice inversible (dont on déterminera l'inverse).

10 Quels sont les résultats des questions précédentes qui se généralisent à tout anneau $(A, +, \star)$?

Devoir n° 7

Endomorphismes dans un espace de matrices
(d'après ENSA 89)

E est l'algèbre $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 ; on pose
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(on rappelle que (M_1, M_2, M_3, M_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$)

1 Soit A une matrice de E ; on lui associe l'application $\Phi(A)$ de E dans E définie par
$$\Phi(A)\colon M \mapsto AM - MA.$$
Vérifier que pour tout A, on a $\Phi(A) \in \mathcal{L}(E)$ (c'est-à-dire que $\Phi(A)$ est un endomorphisme de E).

2 Montrer que Φ est linéaire (en précisant, bien sûr, les espaces de départ et d'arrivée ; on fera tout particulièrement attention à ne pas confondre cette question et la précédente !). Déterminer $\Phi(\lambda I)$ (pour $\lambda \in \mathbf{R}$ fixé).

3 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\Phi(A) = \tilde{0}_{\mathcal{L}(E)}$ (c'est-à-dire l'application nulle $M \mapsto O$) ; utiliser les matrices M_i pour montrer que $b = c = 0$ et que $a = d$.

4 En déduire que $\operatorname{Ker} \Phi = \mathcal{V}\mathtt{ect}(I)$ et que $\operatorname{Im} \Phi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 3.

5 Soit $D = \{u \in \mathcal{L}(E) | (\forall M, N \in E)(u(MN) = u(M)N + Mu(N))\}$. Montrer que D est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et que $\operatorname{Im} \Phi$ est inclus dans D.

6 Soit u un élément de D ; montrer que $u(I) = O$; calculer $M_2.M_2$ (on rappelle que (M_1, M_2, M_3, M_4) est la base «canonique» de E) et en déduire qu'on peut écrire $u(M_2)$ sous la forme $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}$.

7 Montrer de même que $u(M_3)$ est de la forme $\begin{pmatrix} -t & 0 \\ z & t \end{pmatrix}$ et que (avec les notations précédentes) $y + z = 0$.

8 Soit alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $a - d = y = -z$, $c = -x$ et $b = -t$. Montrer que $\Phi(A) = u$. Déduire de ce résultat (et des premières questions) que $\operatorname{Im} \Phi = D$.

9 On va à présent étudier sur un exemple l'endomorphisme $\Phi(A)$: on prend pour A la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice de $u = \Phi(A)$ relativement à la base (de E) (M_1, M_2, M_3, M_4). Cette matrice sera notée U.

10 Déterminer une base du noyau et une base de l'image de u.

11 Montrer qu'il existe deux réels distincts (que l'on notera α et β) tels que $A - \alpha I$ et $A - \beta I$ ne soient pas régulières ; vérifier que $|\alpha - \beta| = 1$. Montrer que $u - id_E$ et $u + id_E$ ne sont pas des automorphismes de E.

12 Utiliser les questions précédentes pour diagonaliser U.

Devoir n° 8

Vissages

1 L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal direct. Soit v la transformation définie par $v\left(M \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right.\right) = M' \left| \begin{array}{l} x' = y + a \\ y' = z + b \\ z' = x + c \end{array}\right.$ (où a, b et c sont trois constantes). Montrer que v est un déplacement, et déterminer ses points fixes éventuels en fonction de a, b et c.

2 Dans le cas où v possède des points fixes, rappeler pourquoi v est une rotation, et la caractériser complètement (axe et angle θ)

3 Soit $t_{\mathbf{u}}$ la translation de vecteur $\mathbf{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$. Montrer qu'on peut écrire v sous la forme $t_{\mathbf{u}} \circ r$, où r est une rotation que l'on explicitera.

4 Plus généralement, montrer qu'il existe une translation t de vecteur $\mathbf{w}$, et une rotation r, telle que $v = t \circ r$, et que Δ, l'axe de r, admette $\mathbf{w}$ pour vecteur directeur (on déterminera $\mathbf{w}$ et Δ en fonction de a, b et c). On dira que v est un *vissage* d'axe Δ, d'angle θ et de translation $\mathbf{w}$. Préciser comment orienter θ.

Plus généralement encore, on dit que l'isométrie f est un *vissage* d'axe Δ, d'angle θ et de vecteur de translation $\mathbf{w}$, si $f = t_{\mathbf{w}} \circ \mathrm{Rot}(\Delta, \theta)$, et si $\mathbf{w}$ est un vecteur de $\overrightarrow{\Delta}$. Le but des deux questions suivantes est de montrer que tout déplacement f de $\mathcal{E}$ est un vissage.

5 Montrer d'abord que si f est une translation ou une rotation, f est un vissage (on dit qu'il est «dégénéré»). Soit A un point quelconque de $\mathcal{E}$. Si $f(A) = B$, soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$; montrer que $t \circ f$ est une rotation ou l'identité de $\mathcal{E}$.

6 Soit alors $\mathcal{P}$ un plan orthogonal à l'axe de la rotation déterminée en **5**. Montrer que l'image de $\mathcal{P}$ par f est un plan $\mathcal{Q}$ parallèle (ou confondu) à $\mathcal{P}$. Soit $\mathbf{w}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$, tel que $\mathcal{P} = t_{\mathbf{w}}(\mathcal{Q})$. Montrer que la transformation $t_{\mathbf{w}} \circ f\big|_{\mathcal{P}}$ est une rotation du plan $\mathcal{P}$ (de centre I), et en déduire que f est un vissage d'axe $(I, \mathbf{w})$ et de vecteur de translation $\mathbf{w}$. Conclure, en n'oubliant pas les cas dégénérés.

7 Montrer que l'axe d'un vissage f est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{Mf(M)}$ soit colinéaire à l'axe de $\overrightarrow{f}$, la rotation vectorielle associée à f. Utiliser cette méthode pour déterminer complètement la nature de la transformation

$$f : M \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right. \mapsto M' \left| \begin{array}{l} x' = \dfrac{1}{3}(-2x - y + 2z) + 1 \\ y' = \dfrac{1}{3}(2x - 2y + z) + 1 \\ z' = \dfrac{1}{3}(x + 2y + 2z) + 3 \end{array}\right.$$

(vissage dont on donnera l'axe, l'angle et le vecteur de translation; on commencera, évidemment, par vérifier que f est un déplacement)