Conjugaison et suites récurrentes

Le but de cette note est d'étudier une relation entre applications, la conjugaison, puis de montrer comment elle permet de ramener certaines suites définies par itération à des suites géométriques, et enfin d'en donner quelques applications à la construction de formules explicites peu connues. J'ai essayé de n'utiliser que des connaissances du niveau d'un (bon) élève de Terminale, mais certains développements et calculs sembleront beaucoup plus compréhensibles si l'on maîtrise, par exemple, l'outil matriciel, et quelques autres résultats classiques en prépa; en revanche, je n'ai pas voulu employer le cadre plus naturel de la théorie des catégories, ni les outils de la géométrie projective; enfin, certains résultats moins importants ont seulement été mentionnés, et les calculs correspondants sont laissés en exercice au lecteur.

1. Conjugaison.

Rappelons d'abord que si f et g sont des applications, on note $g\circ f$ l'application qui à x associe $g(f(x))$, et que si φ est une bijection de A vers B, c'est-à-dire que pour tout élément y de B, il existe un élément unique x de A tel que $\varphi(x)=y$, on note $\varphi^{-1}(y)$ cet élément, et φ^{-1} est une bijection de B vers A, appelée bijection réciproque de φ. Soit f une application de A vers A et g une application de B vers B; on dit qu'elles sont *conjuguées* (et on notera ici $f\sim g$) s'il existe une bijection φ de A vers B telle que $g=\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}$, donc que $g\circ\varphi=\varphi\circ f$; on dira au besoin que g est conjugué de f par φ (cette relation est formellement analogue à celle reliant deux matrices semblables, ou à la notion d'éléments conjugués dans un groupe, mais le cadre le plus général dans lequel elle est définie est en fait celui de la théorie des catégories : pour le lecteur à qui elle serait familière, il s'agit tout simplement de la notion d'isomorphisme dans la catégorie $\mathrm{Endo}(\mathcal{C})$, dont les objets sont les flèches de $\mathcal{C}$ ayant pour source et but le même objet, et les flèches (allant de α vers β) sont les flèches f de $\mathcal{C}$ telles que $f\alpha=\beta f$). Dans ce qui suit, A et B seront le plus souvent des intervalles de $\mathbf{R}$, ou le plan complexe, et on s'intéressera surtout au cas où $A=B$. La conjugaison est une relation d'équivalence; en effet, en supprimant désormais $\circ$ dans les notations, on a $f\sim f$ (réflexivité), puisque $f=\mathrm{Id}_A f\mathrm{Id}_A$, $f\sim g\Rightarrow g\sim f$ (symétrie), puisque $g=\varphi f\varphi^{-1}\Rightarrow f=\varphi^{-1}g\varphi$, et si $f\sim g$ et $g\sim h$, alors $f\sim h$ (transitivité), puisque $h=\varphi_1 g\varphi_1^{-1}$ et $g=\varphi f\varphi^{-1}\Rightarrow h=(\varphi_1\varphi)f(\varphi^{-1}\varphi_1^{-1})=(\varphi_1\varphi)f(\varphi_1\varphi)^{-1}$; cette relation n'est pas compatible avec la composition (même si $A=B$, et si on ne s'intéresse qu'à des bijections), comme nous le verrons plus bas, mais si $f\sim g$, on a $f^n\sim g^n$, où f^n désigne $f\circ f\circ\cdots\circ f$ (n fois), ce qui se démontre aisément par une récurrence immédiate. Il n'est pas facile de montrer en général que deux applications données ne sont pas conjuguées, mais certains invariants peuvent souvent permettre de le déterminer; en effet, si f est injective et pas g, par exemple, g ne saurait être conjugué de f; de même, si x est un point fixe de f (donc si $f(x)=x$), et si $g=\varphi f\varphi^{-1}$, on a $g(\varphi(x))=\varphi(f(\varphi^{-1}(\varphi(x)))=\varphi(x)$, ce qui montre que φ est une bijection des points fixes de f vers ceux de g; deux applications n'ayant pas le même nombre de points fixes (par exemple $x\mapsto x+1$ et $x\mapsto 2x$) ne peuvent donc jamais être conjuguées. On peut d'ailleurs utiliser cette caractérisation pour donner un exemple d'incompatibilité de la conjugaison et de la composition : sur $\mathbf{R}$, les applications f : $x\mapsto 2x$ et $f_1: x\mapsto 2x+1$ sont conjuguées (prendre $\varphi: x\mapsto x-1$, on a alors $\varphi(f(\varphi^{-1}(x)))=2\varphi^{-1}(x)-1=2x+1=f_1(x)$), mais, si g est l'application $x\mapsto x^2/2$, $h=f\circ g$ et $h_1=f_1\circ g$ ne sont pas conjuguées, puisque $x^2=h(x)=x$ possède les deux solutions 0 et 1, alors que $x^2+1=h_1(x)=x$ n'en a aucune réelle. La relation de conjugaison est essentiellement reliée à la «dynamique» de l'application f (et de ses itérées), c'est-à-dire au comportement des suites $u_{n+1}=f(u_n)$, comme nous le verrons en **3**; ainsi, pour $A=B=\mathbf{R}$, deux bijections croissantes (donc continues) ayant le même nombre p (fini) de points fixes sont conjuguées. Esquissons la démonstration pour $p=0$: il suffit de montrer qu'une telle bijection f est conjuguée à $g : x \mapsto x+1$, donc qu'il existe une bijection φ telle que (pour tout x) $\varphi(g(x)) = f(\varphi(x)) = \varphi(x+1)$, on prend alors pour φ l'application $x \mapsto xf(0)$ sur le segment $[0,1[$, et par récurence, on construit sur $[n,n+1[$ l'application φ par la formule $\varphi(x) = f(\varphi(x-1))$ si $n>0$, et par la formule $\varphi(x) = f^{-1}(\varphi(x+1))$ si $n<0$ (la preuve de ce que φ est une bijection si f est croissante et sans points fixes est laissée au lecteur).

2. Les classes de conjugaison des homographies.

Si $f : x \mapsto (ax+b)/(cx+d)$ est une homographie non constante (c'est-à-dire que $ad \neq bc$), ce n'est même pas (sauf si $c=0$) une application; on va donc la prolonger en introduisant un élément ∞ (le point à l'infini de $\mathbf{R}$ ou de $\mathbf{C}$; plus rigoureusement, cela veut dire qu'on se place dans la droite projective réelle ou complexe), et en définissant $f(-d/c) = \infty$ et $f(\infty) = a/c$ (si $c=0$, f est une application affine de la forme $x \mapsto Ax+B$, et on pose alors $f(\infty)=\infty$). Nous nous plaçons donc désormais dans $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$; f est alors une bijection, et f^{-1} est une autre homographie, donnée par la formule $f^{-1}(x) = (-dx+b)/(cx-a)$. On va montrer que, sauf si $(d-a)^2+4bc=0$ (ce qui correspond au cas où f n'a qu'un point fixe), f est conjuguée à une homothétie $g : x \mapsto kx$, et ce par une homographie φ, et que si $(d-a)^2+4bc=0$, f est conjuguée (par une homographie) à une translation $g : x \mapsto x+k$. Les calculs qui suivent se justifient aisément si on représente f par la matrice de l'application linéaire associée $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; en effet, si P est la matrice représentant une autre homographie φ, et si g est conjuguée à f par φ, la matrice représentant $g = \varphi f \varphi^{-1}$ est $G = PFP^{-1}$, et on peut utiliser la théorie de la diagonalisation pour obtenir (sauf si f n'a qu'un point fixe) $G = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ (où λ_1 et λ_2 sont les racines (non nulles, puisque F est inversible) du polynôme caractéristique $P(\lambda) = (\lambda-a)(\lambda-d)-bc$, distinctes si $(d-a)^2+4bc \neq 0$), et donc $g(x) = (\lambda_1/\lambda_2)x$, et si $(d-a)^2+4bc=0$, on sait qu'on peut obtenir $G = \begin{pmatrix} \lambda_1 & p \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, d'où $g(x) = x + p/\lambda_1$. Mais, même si l'on ignore cette théorie, il est parfaitement possible de calculer à la main (ou, plus raisonnablement, avec un logiciel de calcul formel tel que Maple) l'homographie φ qui convient, obtenant, si $u \neq 0$, $\varphi(x) = \dfrac{-2cx+a-d-u}{2cx+d-a-u}$, avec $u^2 = (d-a)^2+4bc$, et de contrôler que g est l'homothétie $x \mapsto g(x) = \dfrac{a-d+u}{a-d-u}x$, et dans le cas où $u=0$, que $\varphi(x) = \dfrac{1-x}{2cx+d-a}$ conduit à la translation $x \mapsto g(x) = x + \dfrac{d-a+2c}{2c(d+a)}$. Pour les applications que nous verrons en **4**, ce résultat suffit, mais on peut se demander quelles sont les classes de conjugaison des homothéties, si l'on ne se restreint plus à des homographies φ. On remarque d'abord que dans le cas réel, si a et b sont >0 et différents de 1, les homothéties $h_1 : x \mapsto ax$ et $h_2 : x \mapsto bx$ sont conjuguées (en prenant $\varphi(x) = \operatorname{sgn}(x) \times |x|^\alpha$ et $\varphi(0)=0$, avec $\alpha = (\ln a)/(\ln b)$), que la classe de $x \mapsto x$ (notée $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$) ne contient qu'elle-même, que $x \mapsto -x$ est la seule homothétie h telle que $h^2 = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$ et donc la seule homothétie de sa classe, et enfin que $x \mapsto ax$ est conjuguée à $x \mapsto -ax$ par φ définie par $\varphi(0)=0$, φ impaire, et si $a^n \leq x < a^{n+1}$ (avec $n \in \mathbf{Z}$), alors $\varphi(x) = (-1)^n x$; il y a donc exactement trois classes de conjugaison des homothéties dans le cas réel. Ce résultat est clairement faux dans le cas complexe (parce que, par exemple, l'homothétie $h : x \mapsto jx$, avec $j = e^{2i\pi/3}$, possède des éléments d'ordre 3 distincts de 0 et de ∞ (c'est-à-dire tels que $h(h(h(x))) = x$), et que toute application conjuguée avec h doit avoir la même propriété) ; la structure complète de ces classes est un peu plus difficile à déterminer, même s'il est clair qu'il y en a une infinité; on montre (en utilisant le logarithme complexe) que toutes les homothéties $x \mapsto ax$, où a n'est pas une racine de l'unité, sont conjuguées entre elles, et que si a est d'ordre p (c'est-à-dire que $a^p = 1$), l'homothétie $x \mapsto ax$ est conjuguée avec toutes les homothéties $x \mapsto bx$, où b est aussi d'ordre p. Quoi qu'il en soit, on voit que de nombreuses classes de conjugaison des homographies existent, mais que toutes contiennent au moins une homothétie, à l'exception de la classe des homographies telles que $(d-a)^2 = -4bc$, qui sont toutes conjuguées entre elles, et à l'application affine $t : x \mapsto x+1$ (t est conjuguée à $t_a : x \mapsto x+a$ d'après le résultat démontré plus haut sur les bijections croissantes). Si on se restreint aux conjugaisons par des homographies, on aboutit finalement à la possibilité d'écrire toute homographie h sous la forme $h(x) = \varphi(k\varphi^{-1}(x))$ ou $h(x) = \varphi(k+\varphi^{-1}(x))$, où φ est une homographie donnée par l'une des formules obtenues ci-dessus.

3. Suites récurrentes conjuguées.

Soit u une suite définie par itération, de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, avec u_0 fixé, où, par exemple, le domaine de f contient un intervalle I tel que $u_0 \in I$ et que $f(I) \subset I$ (on dit que I est un intervalle de stabilité de f). Si f est conjugué de g, avec $g = \varphi f \varphi^{-1}$, on a, en posant $v_n = \varphi(u_n)$ (et donc $u_n = \varphi^{-1}(v_n)$), la récurrence $v_{n+1} = \varphi(f(u_n))$, donc $v_{n+1} = \varphi(f(\varphi^{-1}(v_n))) = g(v_n)$, ce qui montre que $v_n = g^n(v_0)$, et en définitive que $u_n = f^n(u_0) = \varphi^{-1}(v_n) = \varphi^{-1}(g^n(\varphi(u_0))$; on dit que les suites u_n et v_n sont conjuguées. Les propriétés dynamiques de f, c'est-à-dire le comportement des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, sont donc les mêmes que celles de ses conjuguées ; si on se restreint à des conjugaisons par des bijections φ continues, il en est de même des propriétés de convergence (par exemple, si la suite (u_n) converge vers a, la suite (v_n) convergera vers $\varphi(a)$; si elle possède un 2-cycle attracteur (a, b) (c'est-à-dire que $\lim u_{2n} = a$ et $\lim u_{2n+1} = b$, il en sera de même de v (avec $(\varphi(a), \varphi(b))$ comme cycle limite), etc. Cette technique est au centre de l'étude des systèmes dynamiques (et permet par exemple d'expliquer l'apparition de l'ensemble de Mandelbrot, ou plus précisément de copies déformées (par φ) de celui-ci, dans de nombreux problèmes d'étude de convergence) ; pour les fonctions homographiques, on obtient ainsi, à l'aide des calculs faits en **2**, le résultat suivant : soit une suite u définie par u_0 et la relation $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$; si $k = \dfrac{a-d+r}{a-d-r}$ (avec $r = \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}$) est un réel > 1, la suite $v_n = \varphi(u_n) = k^n v_0$ converge vers ∞ si $v_0 \neq 0$, et donc la suite u_n converge vers $(a+r-d)/2c$ si $u_0 \neq (d+r-a)/2c$; le comportement de u_n pour les autres valeurs de k (y compris les valeurs complexes correspondant au cas $(d-a)^2 + 4bc < 0$) s'étudierait de manière analogue.

4. Quelques exemples de formules explicites.

Il est parfois possible de se ramener par conjugaison à des formules connues. Partant de la formule de duplication classique $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ (et de son analogue hyperbolique $\operatorname{ch}(2x) = 2\operatorname{ch}^2 x - 1$), on voit que (sur des intervalles convenables) cela signifie que $f : x \mapsto 2x^2 - 1$ est conjuguée à l'homothétie $g : x \mapsto 2x$ (par exemple, sur $I = [1, +\infty[$, on a $f = \varphi g \varphi^{-1}$, avec $\varphi(x) = \operatorname{ch} x$ (et $\varphi^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$). On en déduit que la suite u_n définie par $u_0 \geq 1$ et $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$ possède la formule explicite $u_n = \operatorname{ch}(2^n \varphi^{-1}(u_0))$. D'autres récurrences quadratiques (de la forme $u_{n+1} = au_n^2 + bu_n + c$) auront de même une expression explicite, si f est conjuguée à

$h : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (de préférence par une bijection φ facilement explicitable) ; ainsi, la suite $v_{n+1} = v_n^2 - 2$ (et $v_0 \geq 2$) est conjuguée de la suite précédente par $\varphi(x) = 2x$. Malheureusement, peu de suites quadratiques peuvent ainsi être «résolues», car en général la récurrence $u_{n+1} = u_n^2 + c$ donne naissance à un domaine de «convergence», l'ensemble de Julia J_c (plus précisément, il s'agit de l'ensemble (dans le plan complexe) des u_0 pour lesquels la suite ne diverge pas en module, ainsi J_0 est le disque unité), or J_c est fractal pour la plupart des c, et donc φ, à supposer qu'il existe, ne saurait être une fonction régulière, ou même simplement explicitable.

En revanche, le cas des suites homographiques ($u_{n+1} = (au_n + b)/(cu_n + d)$) peut être complètement explicité dans tous les cas, grâce aux résultats de **2**. Voici un exemple d'application de cette méthode : soit u une suite définie par une récurrence linéaire à deux termes $u_{n+2} = Au_{n+1} + Bu_n$, dont on sait (ce résultat peut au besoin se redémontrer par récurrence) que la solution est de la forme $u_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n$, où λ_1 et λ_2 sont les solutions de l' «équation caractéristique» $\lambda^2 - A\lambda - B$ (si $A^2 + 4B \neq 0$), et où a et b sont déterminés par les «conditions initiales» u_0 et u_1. Posant $v_n = u_{n+1}/u_n$ (ou ∞ si $u_n = 0$, on voit aisément que la suite v vérifie la relation $v_{n+1} = A + B/v_n = f(v_n)$, où f est une homographie que nous avons appris à conjuguer par $\varphi : x \mapsto \dfrac{(A+r)x + A - r}{2(x+1)}$, avec $r^2 = A^2 + 4B$, obtenant $g(x) = \varphi(f(\varphi^{-1}(x))) = \dfrac{A+r}{A-r}x$, donc $v_n = \varphi^{-1}(w_n)$, avec $w_0 = \varphi(v_0)$ et $w_n = k^n w_0$, avec $k = (A+r)/(A-r)$. Finalement, on a donc une relation assez peu évidente au départ entre les deux expressions ainsi obtenues pour v_n ; dans le cas $A = B = 1$ et $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ (u est la suite de Fibonacci $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$), on obtient par la formule classique

$$v_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n)},$$

et par la deuxième méthode, $\varphi(x) = \dfrac{-2x + 1 - \sqrt{5}}{2x - 1 - \sqrt{5}}$, $w_0 = \varphi(\infty) = -1$, et $k = -(3+\sqrt{5})/2$, d'où (après quelques simplifications)

$$v_n = \varphi^{-1}(-k^n) = \frac{(1+\sqrt{5})(-3-\sqrt{5})^n + (\sqrt{5}-1)2^n}{2((-3-\sqrt{5})^n - 2^n)}.$$

Il est déjà assez étonnant que les deux expressions de v_n soient égales (et rationnelles) pour $n \in \mathbf{Z}$, mais le calcul numérique montre de plus qu'elles ont la même partie réelle et des parties imaginaires opposées si n n'est pas entier (du moins en prenant une branche convenable de la fonction $z_1^{z_2}$ dans les complexes, c'est-à-dire en définissant $(-a)^x$ (pour $a > 0$) par la formule $(-a)^x = e^{x(\ln a + i\pi)} = a^x(\cos \pi x + i \sin \pi x)$) ... (toutefois, si l'on choisit un cas où r est entier, par exemple $A = 5$ et $B = -6$, $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on obtient $u_n = 3^n - 2^n$, donc $v_n = \dfrac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3^n - 2^n}$; $\varphi(x) = \dfrac{4 - 2x}{2x - 6}$, et $k = 3/2$, et on trouve finalement la même formule pour v_n par les deux méthodes.)

Pour conclure, on va appliquer cette technique à la méthode de Newton pour le calcul d'une racine carrée, en remarquant que les fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x/2 - A/2x$ sont conjuguées. Par identification, par exemple, on peut vérifier que si $\varphi(x) = (x - \sqrt{A})/(x + \sqrt{A})$, on a bien $f = \varphi g \varphi^{-1}$, donc la suite u_n définie par $u_{n+1} = g(u_n) = \dfrac{u_n^2 - A}{2u_n}$ est conjuguée de v_n définie par $v_{n+1} = f(v_n) = v_n^2$, et donc $v_n = v_0^{2^n}$, d'où $u_n = \varphi^{-1}(v_n) = \sqrt{A}\dfrac{1 + v_0^{2^n}}{1 - v_0^{2^n}}$ (avec $v_0 = (u_0 - \sqrt{A})/(u_0 + \sqrt{A})$), d'où, si $u_0 > \sqrt{A}$, donc $0 < v_0 < 1$, une convergence très rapide de u_n vers $\sqrt{A}$, puisque $u_n - \sqrt{A} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{A} v_0^{2^n}$ (par exemple, si $A = u_0 = 2$, $u_3 - \sqrt{2} < 10^{-5}$ et $u_5 - \sqrt{2} < 10^{-24}$).