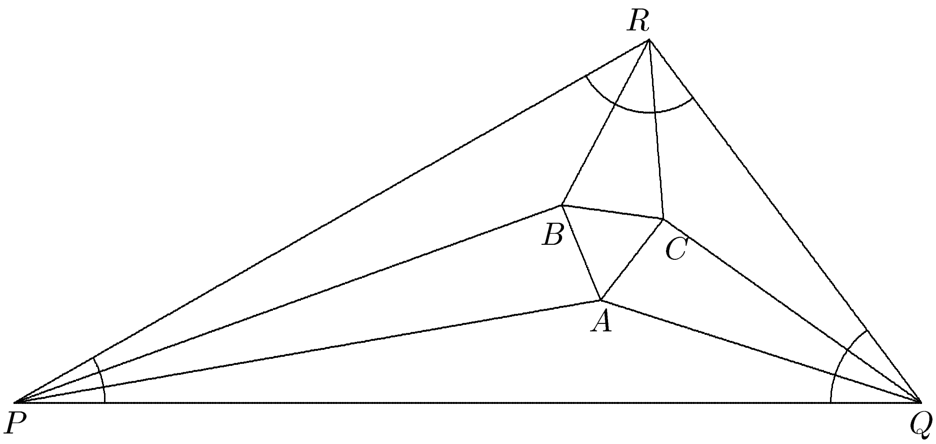
Une démonstration (par Alain Connes) du théorème de Morley

On appelle *trisectrices (intérieures)* d'un triangle les 6 droites qui partagent chacun des angles du triangle en trois angles égaux. Le théorème de Morley dit que les trois points d'intersection A, B et C de trois des trisectrices d'un triangle quelconque PQR (voir la figure ci-dessous) forment un triangle équilatéral.



La démonstration de Connes établit d'abord un résultat technique sur un certain groupe de transformations d'un corps. Comme la preuve de ce résultat ne demande que des calculs élémentaires, on va le démontrer dans le cas général, mais son application au théorème de Morley n'utilise que le cas où le corps est celui des nombres complexes.

On se place donc dans un corps k quelconque (de caractéristique nulle pour simplifier, mais les calculs sont valables sans changements en caractéristique p quelconque $\neq 3$, et même (avec quelques précautions supplémentaires) en caractéristique 3) ; le groupe affine G de k est composé des transformations affines de la forme $g : x \mapsto g(x) = ax + b$ ($x \in k$), où $a \in k$, $a \neq 0$ et $b \in k$ (avec comme loi de groupe la composition des transformations : $(gg')(x) = g(g'(x)) = a(g'(x)) + b = aa'x + ab' + b$). Pour $g = [\![x \mapsto ax + b]\!] \in G$, on pose $d(g) = a \in k^*$ (le sous-groupe multiplicatif des éléments non nuls de k), et $t(g) = b$. d est un morphisme de G vers k^*. On pose aussi $T = \mathrm{Ker}(d) = \{g / d(g) = 1_k\}$; c'est le sous-groupe des translations, isomorphe (par t) au groupe additif de k. Pour $g \notin T$, $a \neq 1$, et g admet exactement un point fixe, noté $\mathrm{fix}(g) = b/(1-a)$, c'est-à-dire que $g(\mathrm{fix}(g)) = \mathrm{fix}(g)$.

Théorème (Alain Connes). *Soit g_1, g_2, $g_3 \in G$ tels que g_1g_2, g_2g_3, g_3g_1 et $g_1g_2g_3$ ne soient pas dans T. Soit $j = d(g_1g_2g_3)$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $g_1^3g_2^3g_3^3 = 1$;

b) $j^3 = 1$ et $A + jB + j^2C = 0$, où $A = \mathrm{fix}(g_1g_2)$, $B = \mathrm{fix}(g_2g_3)$, et $C = \mathrm{fix}(g_3g_1)$.

Démonstration.

Soit $g_i = a_ix + b_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$. L'égalité $g_1^3g_2^3g_3^3 = 1$ est équivalente à $d(g_1^3g_2^3g_3^3) = 1$, et $t(g) = 0$. La première condition équivaut à $j^3 = 1$, puisque d est un morphisme. De plus, par hypothèse, $j \neq 1$. Montrons par calcul direct que

$$t(g) = b = (a_1^2 + a_1 + 1)b_1 + a_1^3(a_2^2 + a_2 + 1)b_2 + (a_1a_2)^3(a_3^2 + a_3 + 1)b_3.$$

En effet, on a vu que $t(h_1h_2) = d(h_1)t(h_2) + t(h_1)$, donc $t(g_1^2) = (a_1 + 1)b_1$, d'où $t(g_1^3) = (a_1^2 + a_1 + 1)b_1$, puis $t(g_1^3 g_2^3) = (a_1^2 + a_1 + 1)b_1 + a_1^3(a_2^2 + a_2 + 1)b_2$, et finalement, on obtient bien l'égalité annoncée. En utilisant $j = a_1a_2a_3$, cette égalité se réécrit

$$b = -ja_1^2a_2^2(a_1 - j)(a_2 - j)(a_3 - j)(A + jB + j^2C),$$

où les points fixes ont été exprimés explicitement : $A = (a_1b_2 + b_1)/(1 - a_1a_2)$, $B = (a_2b_3 + b_2)/(1 - a_2a_3)$ et $C = (a_3b_1 + b_3)/(1 - a_3a_1)$ (le contrôle de ce dernier calcul est laissé au lecteur). Or, $a_i \neq j$ puisque, par hypothèse, les produits deux à deux des g_i ne sont pas des translations. Le théorème en résulte.

Corollaire (théorème de Morley).

Soit un triangle PQR. Prenons pour k le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, et identifions les points à leurs affixes dans le plan complexe. Soit g_1 la rotation de centre P et d'angle $\frac{2}{3}(\widehat{\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}})$; g_2 la rotation de centre Q et d'angle $\frac{2}{3}(\widehat{\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QP}})$et g_3 la rotation de centre R et d'angle $\frac{2}{3}(\widehat{\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}})$. On sait que g_i est représentable par une transformation affine de la forme $z \mapsto az + b$, où $a = \exp(i\pi\theta)$, θ étant l'angle de la rotation, et que $b/1 - a$ est l'affixe du point fixe de g_i, c'est-à-dire du centre de la rotation. $g_1^3 g_2^3 g_3^3 = 1$, parce que chaque g_i^3 est le produit des symétries (orthogonales) par rapport aux deux côtés formant l'angle correspondant (en effet, par exemple, g_1^3 est une rotation d'angle $2\widehat{P}$, et on sait qu'on peut l'exprimer comme produit des deux symétries par rapport à (PQ) et par rapport à (PR), dans cet ordre). Ceci établit la condition a) du théorème, ce qui entraîne la condition b). Or, les points fixes des rotations étant par définition leurs centres, la construction précédente des rotations comme produit de symétries permet de voir facilement que A, B, et C sont les intersections des trois trisectrices de la figure. Et, en particulier, la condition b) entraîne que $A + jB + j^2C = 0$. Or cette dernière égalité est une caractérisation classique des triangles équilatéraux : pour montrer, par exemple, que $AB = BC$, donc que $|B - A| = |C - B|$, il suffit de remarquer que $B - A = (1 + j)B + j^2C = -j^2B + j^2C = j^2(C - B)$ (puisque $1 + j + j^2 = 0$, et que $|j| = 1$).

Remarque : l'argument s'adapte aisément aux autres trisectrices (en multipliant les g_i par j ou par j^2); le lecteur diligent pourra ainsi construire un total de 27 triangles équilatéraux, les triangles de Morley...