Matrices antisymétriques et rotations vectorielles

Cette note a pour objet d'exposer quelques résultats matriciels peu connus, en se limitant au niveau des classes préparatoires. La première partie ne demande que des connaissances très élémentaires sur les matrices; la seconde utilise quelques résultats plus avancés, correspondant typiquement au programme de la Spé.

Calculs matriciels.

Résultats préliminaires.

On se place dans l'algèbre des matrices carrées à coefficients réels $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, considérées comme représentant les endomorphismes de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, rapporté à sa base canonique; on notera f_A l'endomorphime représenté par la matrice A. On rappelle d'abord que la tranposition, associant à $A = (a_{ij})$ la matrice ${}^tA = (a_{ji})$, vérifie ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ et ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$; une matrice antisymétrique est une matrice A telle que ${}^tA = -A$; on dit qu'une matrice R est orthogonale (ce qui se note $R \in \mathcal{O}_n$) si son inverse est égale à sa transposée, et donc si $R \times {}^tR = {}^tR \times R = I_n$. Une rotation vectorielle est un endomorphisme d'un espace euclidien dont la matrice (dans une base orthonormée directe) est orthogonale, de déterminant $+1$.

Nous aurons besoin du résultat suivant : si k est valeur propre d'une matrice antisymétrique A (et donc s'il existe un vecteur-colonne non nul V tel que $AV = kV$), alors k est imaginaire pur : en effet, notant $\overline{M}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués (dans $\mathbf{C}$) de ceux de M, on aura (avec les notations précédentes) $\overline{{}^t(AV)} = \overline{k{}^tV} = {}^t\overline{V}(-A)$ (puique A est réelle et antisymétrique), donc ${}^t\overline{V}AV = k\,{}^t\overline{V}V = \overline{k}\,{}^t\overline{V}V$; remarquant enfin que V est non nul, on voit facilement que ${}^t\overline{V}V = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 > 0$, et donc finalement $\overline{k} = -k$, donc k est imaginaire pur.

La transformation de Cayley.

L'homographie $h : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$, bijection de $\mathbf{R} - \{1\}$ vers $\mathbf{R} - \{-1\}$, se généralise à tout anneau (unitaire) A, envoyant les éléments a tels que $1_A - a$ soit inversible (à gauche) vers $(1_A + a)(1_A - a)^{-1}$; dans le cas des matrices, cette application s'appelle la *transformation de Cayley.*

Si A est antisymétrique, 1 n'est pas valeur propre de A, et donc $I - A$ est inversible. On pose $R = (I+A)(I-A)^{-1}$ (transformation de Cayley); on va montrer que R est une matrice de rotation. Remarquons que si C est inversible, et si $BC = CB$, alors $BC^{-1} = C^{-1}B$ (en effet $C^{-1}(BC)C^{-1} = C^{-1}(CB)C^{-1}$); on en déduit que $R = (I-A)^{-1}(I+A)$, et donc que $R^{-1} = (I+A)^{-1}(I-A) = {}^t(I-A)^{-1}{}^t(I+A) = {}^tR$, puisque ${}^tC^{-1} = ({}^tC)^{-1}$, ce qui est la définition d'une matrice orthogonale; comme $\det(C) = \det({}^tC)$, et que $\det(BC) = \det B \det C$, on voit que $\det R = +1$.

Réciproquement, soit S une matrice quelconque telle que $S + I$ soit inversible (ce qui est équivalent à «-1 n'est pas valeur propre de S»). On vérifie aisément que l'équation matricielle $S = (I+X)(I-X)^{-1}$ est équivalente à $S(I-X) = I + X$, donc à $(S+I)X = I - S$, soit $X = (S+I)^{-1}(I-S)$ (la transformation de Cayley est donc une bijection entre l'ensemble des matrices n'ayant pas 1 pour valeur propre et celui des matrices n'ayant pas -1 pour valeur propre). Si de plus S est orthogonale,

X est antisymétrique (et S est alors une matrice de rotation, car on vérifie aisément que si $\det S = -1$, -1 est valeur propre de S).

Examinons plus en détail les cas $n = 2$ et $n = 3$. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$, on obtient $R = \dfrac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1-t^2 & -2t \\ 2t & 1-t^2 \end{pmatrix}$; on reconnait les «formules en t» (avec $t = \tan\theta/2$, R est la matrice de la rotation d'angle $\theta = 2\,\mathrm{Arc\,tg}\, t$, et $-\pi < \theta < \pi$). Si à présent $A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}$, le calcul (plus raisonnablement effectué dans ce cas avec Maple) aboutit à

$$R = \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\begin{pmatrix} 1-x^2-y^2+z^2 & 2\,x-2\,yz & 2\,y+2\,xz \\ -2\,x-2\,yz & 1-x^2+y^2-z^2 & 2\,z-2\,xy \\ -2\,y+2\,xz & -2\,z-2\,xy & 1+x^2-y^2-z^2 \end{pmatrix}.$$

Cette forme donne donc une description paramétrique (rationnelle) de toutes les rotations de l'espace qui ne sont pas des demi-tours (et on obtient ces derniers en passant à la limite quand $x^2+y^2+z^2$ tend vers l'infini).

Remarquons alors que si $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et si $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \operatorname{Ker} f_A$, donc si $AV = O_{3,1}$, on aura $(I+A)V = V$, $(I-A)V = V$ et $(I-A)^{-1}V = V$; ainsi, $RV = V$ et $\mathbf{v}$ appartient à l'axe de la rotation f_R (plus généralement, les vecteurs du noyau de f_A sont exactement les vecteurs fixes de f_R, c'est-à-dire ceux qui vérifient $f_R(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$). Comme on vérifie aisément que $A\begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on voit donc que $\mathbf{v} = (z, -y, x)$ est vecteur directeur de l'axe de la rotation f_R ; on peut d'ailleurs remarquer que f_A est l'endomorphisme $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. Quand à l'angle de la rotation, θ, on ne peut le déterminer par ces méthodes ; on démontre que la trace de R (la somme des éléments de la diagonale) est égale à $1+2\cos\theta$, d'où $\cos\theta = \dfrac{1-x^2-y^2-z^2}{1+x^2+y^2+z^2}$; on retrouve ainsi que θ tend vers π lorsque $x^2+y^2+z^2$ tend vers l'infini.

Exponentielle et logarithme.

Résultats préliminaires.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de la norme $M = (m_{ij}) \mapsto \|M\| = n \sup |m_{ij}|$ (où le facteur n est choisi pour qu'on ait non seulement $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ et $\|kA\| = |k|\|A\|$, mais aussi $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$) ; on dit qu'une suite de matrices M_n converge vers L si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|L - M_n\| = 0$; l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est complet pour cette norme (et en fait, comme on est en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes), c'est-à-dire que toute suite de Cauchy est convergente. Soit alors $S(z) = \sum\limits_{k\geq 0} a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence ρ ; posant $S_k(A) = \sum\limits_{j=0}^{k} a_j A^j$ (où l'on conviendra désormais que $A^0 = I_n$), la suite des $S_k(A)$ converge vers une limite (qu'on notera $S(A)$) si $\|A\| < \rho$; on peut déjà remarquer qu'alors ${}^tS(A) = S({}^tA)$. En particulier, la série $\sum_{k\geq 0} A^k/k!$ converge pour tout A vers une matrice qu'on note $\exp A$ ou e^A; la fonction exponentielle ainsi définie possède certaines des propriétés de l'exponentielle usuelle; en particulier, si $AB = BA$, on a $e^A e^B = e^{A+B}$. D'autre part, on sait que $(PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1}$; on en déduit que si $B = PAP^{-1}$, alors $S(B) = PS(A)P^{-1}$, en particulier, si A est diagonalisable, de valeurs propres λ_1, λ_2, $\ldots \lambda_n$, $S(A)$ sera diagonalisable, de valeurs propres $S(\lambda_i)$. Dans le cas général, en écrivant $A = PTP^{-1}$ (forme de Jordan), on voit que $S(A)$ converge si $S(\lambda_i)$ converge pour toutes les valeurs propres de A, et en particulier si toutes ces valeurs propres sont de module $< \rho$.

Exponentielle d'une matrice antisymétrique.

On a évidemment $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$; si A est antisymétrique (réelle), donc si ${}^tA = -A$, on aura ${}^t\exp(A) = \exp({}^tA) = \exp(-A) = (\exp A)^{-1}$, ce qui montre qu'alors $\exp A$ est une matrice orthogonale. Mettant A sous forme de Jordan, et appelant λ_i les valeurs propres de A (dont on a vu dans la première partie qu'elles sont imaginaires pures), on aura $A = PTP^{-1}$ avec $\operatorname{Tr} T = \sum \lambda_i = \operatorname{Tr} A = 0$, et donc $\det \exp A = \det \exp T = \prod \exp(\lambda_i)$, d'où la formule (valable pour toute matrice) $\det \exp(A) = \exp(\operatorname{Tr} A)$. En particulier, si A est antisymétrique, $\det \exp A = e^0 = 1$, et $\exp A$ est une matrice de rotation. On voit d'autre part que si $AV = O_{1n}$, on aura $S(A)V = a_0V$, donc les vecteurs $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f_A$ vérifient $f_{\exp A}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

Si $n = 2$, le calcul direct de $\exp A$ est facile en remarquant que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; on obtient $\exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, matrice de la rotation d'angle t. En revanche, pour $n = 3$, le résultat obtenu par Maple est bien peu lisible; cependant, si $A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}$, $\exp A$ est la matrice d'une rotation vectorielle d'axe $(z; -y, x)$, puisque $A \begin{pmatrix} z \\ -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; pour obtenir l'angle de rotation, on remarque que A a pour valeurs propres 0, $i\sqrt{x^2+y^2+z^2} = i\alpha$ et $-i\alpha$, donc que les valeurs propres de $\exp A$ sont 1, $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$; l'angle de la rotation est donc (au signe près) $\alpha = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Contrairement à la transformation de Cayley, l'application exponentielle n'est nullement bijective (même en se restreignant au cas des matrices à coefficients réels), et il est donc peu raisonnable d'envisager de retrouver A à l'aide d'un logarithme. Cependant la série $S(B) = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} B^k/k$ converge si les valeurs propres de B sont toute de module < 1, et on a bien $\exp S(B) = I_n + B$ dans ce cas; les propriétés de l'exponentielle permettent ensuite d'obtenir un logarithme pour d'autres matrices, en effet cette série converge pour $B' = kB$ dès que $|k| < 1/\|B\|$. À titre d'exemple, cherchons X tel que $\exp X = C = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, et donc $B = \begin{pmatrix} -3/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -3/2 \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres, $-3/2 \pm i\sqrt{3}/2$, sont de module $\sqrt{3}$. Remarquant que $B' = -C/2 - I_2 = \begin{pmatrix} -1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & -1/4 \end{pmatrix}$ a des valeurs propres $(-1/4 \pm i\sqrt{3}/4)$ de module 1/2, on obtient donc une série convergente $Y = S(B')$ qui vérifie $\exp Y = I_2 + B' = -C/2$; il suffit alors de trouver Z telle que $\exp Z = -2I_2$ pour que $X = Y + Z$ convienne; on en déduit une solution $X = S(B') + (\ln 2 + i\pi)I_2$, mais il semble difficile d'obtenir par ces méthodes la solution antisymétrique $A = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi/3 \\ -2\pi/3 & 0 \end{pmatrix}\ldots$