La formule de Faà di Bruno

Le but de cette note est de démontrer la formule suivante, due (vers 1875) à Faà di Bruno, donnant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'une fonction composée :

$$(1) \qquad (g\circ f)^{(n)} = \sum_{\begin{cases} p_1+p_2+\cdots+p_n=m \\ p_1+2p_2+\cdots+np_n=n\end{cases}} \frac{n!}{p_1!p_2!\ldots p_n!}\,(g^{(m)}\circ f)\times\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{f^{(i)}}{i!}\right)^{p_i}$$

(où f et g sont supposées de classe $\mathcal{D}^n$, et où $h^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ de h). On peut encore l'écrire (mais est-ce vraiment plus lisible ?) :

$$(1') \qquad (g\circ f)^{(n)} = \sum_{\sum_{k=1}^{n} kp_k=n} (g^{(\sum_{k=1}^{n} p_k)}\circ f)\times\prod_{i=1}^{n}\frac{i}{p_i!}\left(\frac{f^{(i)}}{i!}\right)^{p_i}$$

Malgré les apparences, cette formule est relativement simple d'emploi : elle nous dit, par exemple, que dans $(g\circ f)^{(12)}$ figure un terme de la forme $C(g^{(7)}\circ f)f'^2f''^3f''''$, et que $C = \dfrac{12!}{2!\times 3!\times(2!)^3\times 4!} = 207900$.

On en déduit assez facilement (en prenant $g : x\mapsto 1/x$) la formule suivante :

$$(2) \qquad \left(\frac{1}{f}\right)^{(n)} = \frac{n!}{f^{n+1}}\sum_{\begin{cases} p_0+p_1+p_2+\cdots+p_n=n \\ p_1+2p_2+\cdots+np_n=n\end{cases}} C(p_0,p_1,\ldots,p_n)\prod_{i=0}^{n}\left(f^{(i)}\right)^{p_i}$$
$$\text{avec } C(p_0,p_1,\ldots,p_n) = \frac{(-1)^{n-p_0}(n-p_0)!}{\prod_{i=1}^{n}(i!)^{p_i}\;p_i!}$$

(dont la démonstration est laissée au lecteur).

Pour démontrer la formule (1), montrons d'abord par récurrence que la formule

$$(3) \qquad (g\circ f)^{(n)} = \sum_{\sum_{k=1}^{n} kp_k=n} a(n,p_1,p_2,\ldots,p_n)\times(g^{(\sum_{k=1}^{n} p_k)}\circ f)\times\prod_{i=1}^{n}(f^{(i)})^{p_i},$$

où les $a(n,p_1,p_2,\ldots,p_n)$ sont des constantes, est vraie. Pour $n=1$, on obtient $p_1=1$, donc $(g\circ f)' = (g'\circ f)\times f'$, qui est la formule bien connue de dérivation des fonctions composées. Supposons qu'elle soit vraie pour un certain $n\geq 1$; on obtient en la dérivant

$$(g\circ f)^{(n+1)} = \sum_{\sum_{k=1}^{n} kp_k=n} a(n,p_1,p_2,\ldots,p_n)\times f'\times(g^{(1+\sum_{k=1}^{n} p_k)}\circ f)\times\prod_{i=1}^{n}(f^{(i)})^{p_i}$$
$$+\sum_{\sum_{k=1}^{n} kp_k=n} a(n,p_1,p_2,\ldots,p_n)\times(g^{(\sum_{k=1}^{n} p_k)}\circ f)\times\left(\prod_{i=1}^{n}(f^{(i)})^{p_i}\right)'.$$

La première somme se réécrit donc

$$\sum_{\sum_{k=1}^{n} kq_k = n+1} a(n, p_1, p_2, \ldots, p_n) \times (g^{(\sum_{k=1}^{n} q_k)} \circ f) \times \prod_{i=1}^{n} (f^{(i)})^{q_i},$$

où $q_i = p_i$ si $i \geq 2$, et $q_1 = p_1 + 1$, ce qui est bien de la forme cherchée (et apporte une contribution de $a(n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ au terme $a(n+1, p_1+1, p_2, \ldots, p_n, 0)$). Comme on sait (dérivée logarithmique) que

$$\left(\prod_{i=1}^{n} (f^{(i)})^{p_i}\right)' = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right) \prod_{i=1}^{n} (f^{(i)})^{p_i},$$

on voit que la seconde somme est formée de termes de la forme $C(g^{(\sum_{k=1}^{n} p_k)} \circ f) \times \prod_{i=1}^{n+1} (f^{(i)})^{r_i}$, avec $r_i = p_i$ pour $i \notin \{k, k+1\}$, $r_k = p_k - 1$ et $r_{k+1} = p_{k+1} + 1$ (si $k = n$, on a évidemment $p_{n+1} = 0$ par récurrence, et $r_{n+1} = 1$). Ainsi, $\sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{k=1}^{n+1} r_j$, et $\sum_{j=1}^{n+1} jr_j = (\sum_{j=1}^{n} jp_j) + (k+1) - k = n+1$. Par récurrence, la formule est donc vraie ; et on vient de voir, plus précisément, que le coefficient $a(n+1, p_1, p_2, \ldots, p_n, 0)$ est somme de $a(n, p_1 - 1, p_2, \ldots, p_n)$, et des termes $(p_k+1)a(n, p_1, p_2, \ldots, p_k+1, p_{k+1}-1, \ldots, p_n)$, et que $a(n+1, 0, 0, \ldots, 0, 1) = 1$.

Il faut donc à présent montrer que

$$a(n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} (p_k! \times (k!)^{p_k})}.$$

On a évidemment $a(1, 1) = 1$; supposons (hypothèse de récurrence) que pour n fixé, et pour toute suite $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $\sum_{k=1}^{n} kp_k = n$, on ait ce résultat. Il est évidemment encore vrai pour $a(n+1, 0, 0, \ldots, 0, 1) = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)!} = 1$; il suffit donc de montrer que pour toute suite $(q_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $\sum_{k=1}^{n} kq_k = n+1$, on a

$$a(n+1, q_1, q_2, \ldots, q_n, 0) = \frac{(n+1)!}{\prod_{k=1}^{n} (q_k! \times (k!)^{q_k})}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} a(n+1, q_1, q_2, \ldots, q_n, 0) = {} & a(n, q_1 - 1, q_2, \ldots, q_n) \\ & + (q_1 + 1)a(n, q_1 + 1, q_2 - 1, q_3, \ldots, q_n) \\ & + (q_2 + 1)(a_n, q_1, q_2 + 1, q_3 - 1, \ldots, q_n) + \\ & \quad \cdots + (q_{n-1} + 1)a(n, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1} + 1, q_n - 1) \end{aligned}$$

(en utilsant la convention $a(n, q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0$ si l'un des q_i est négatif). On voit donc que tout revient à montrer que

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)!}{\prod_{k=1}^{n}(q_k! \times (k!)^{q_k})} &= \frac{n! \times q_1 \times 1!}{\prod_{k=1}^{n}(q_k! \times (k!)^{q_k})} \\ &+ \frac{n! \times (q_1+1) \times q_2 \times 2!}{(q_1+1) \times 1! \times \prod_{k=1}^{n}(q_k! \times (k!)^{q_k})} \\ &+ \frac{n! \times (q_2+1) \times q_3 \times 3!}{(q_2+1) \times 2! \times \prod_{k=1}^{n}(q_k! \times (k!)^{q_k})} + \\ &\cdots + \frac{n! \times (q_{n-1}+1) \times q_n \times n!}{(q_{n-1}+1) \times (n-1)! \times \prod_{k=1}^{n}(q_k! \times (k!)^{q_k})}\end{aligned}$$

(en utilisant la convention $0 \times (-1)! = 1$, pour pouvoir écrire $p! = p \times (p-1)!$ dans tous les cas). Réduisant au même dénominateur et simplifiant, on obtient donc

$$n + 1 = q_1 + 2q_2 + \cdots + nq_n,$$

ce qui est justement la propriété caractérisant la suite $(q_i)_{1 \leq i \leq n}$!