Une démonstration de la divergence de $\displaystyle\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p}$ (due à P. Erdős)

Supposons que $\displaystyle\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p}$ converge; il existe donc k tel que $\displaystyle\sum_{\substack{p \geq k \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} < \frac{1}{2}$. Soit N_s le nombre des entiers $\leq N$ n'ayant pas de diviseur premier supérieur à k ; on a donc $N - N_s$ entiers ($\leq N$) divisibles par au moins l'un des p_i (premiers) $\geq k$, et il y a au plus N/p_i entiers ($\leq N$) divisibles par p_i, donc $N - N_s \leq N(\displaystyle\sum_{p_i \geq k} \frac{1}{p_i}) < N/2$. Mais d'autre part, si n est un entier $\leq N$ n'ayant pas de diviseurs premiers supérieurs à k, on peut écrire $n = ab^2$, où a n'est pas divisible par un carré, et donc a est de la forme $\prod q_i$, avec les q_i premiers tous distincts, et inférieurs à k. Ainsi, il y a au plus 2^k valeurs distinctes pour a, et comme $b^2 \leq N$, il y a au plus $\sqrt{N}$ valeurs distinctes pour b, ce qui montre que $N_s \leq 2^k\sqrt{N}$. Il suffit donc de prendre $N > 4^{k+1}$ pour obtenir $N_s < N/2$ (car on a alors $\sqrt{N} > 2^{k+1}$, donc $2^k\sqrt{N} < \dfrac{\sqrt{N}}{2}\sqrt{N} = N/2$), et donc la contradiction cherchée : $(N - N_s) + N_s = N < N/2 + N/2$.