MATRICES ORTHOGONALES

(INTERLUDE)

1 Définitions.

1.1 Matrices orthogonales.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est *orthogonale* si elle est l'inverse de sa transposée : $M^tM =^t MM = I_n$ (attention : cette définition ne se généralise pas à $\mathbf{C}$; une définition analogue existe (on obtient alors les matrices dites *hermitiennes*), mais elle fait aussi intervenir la conjugaison, et est hors-programme en classes prépas). Il est clair que si $M^tM = I_n$, on a aussi (d'après les propriétés de l'inverse) ${}^tMM = I_n$, ce qui montre que ${}^tM$ est aussi orthogonale.

1.2 Le groupe orthogonal.

L'ensemble des matrices orthogonales forme un groupe (pour la multiplication) puisque $AB^t(AB) = AB^tB^tA$ (et que I_n est orthogonale), appelé le *groupe orthogonal*; on le note $\mathcal{O}_n$. Remarquons que le déterminant d'une matrice orthogonale vérifie $\det(M)\det({}^tM) = (\det(M))^2 = \det(I_n) = 1$, et donc que $\det(M) = \pm 1$; les matrices pour lesquelles ce déterminant vaut 1 forment un sous-groupe du groupe orthogonal, noté $\mathcal{O}_n^+$; on remarquera que l'ensemble des autres matrices orthogonales (noté $\mathcal{O}_n^-$) n'est pas un sous-groupe.

2 Propriétés matricielles.

2.1 Conséquences de la définition.

Soit $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $\mathcal{O}_n$, calculons explicitement $I_n = M^tM$: si on pose $I_n = (\delta_{ij})$ (symbole de Kronecker) avec $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ii} = 1$, on doit avoir $\delta_{ij} = \sum\limits_{k=1}^n a_{ik}a_{jk}$; et par conséquent on aura pour tout i $\sum\limits_{k=1}^n a_{ik}^2 = 1$ et, pour tout couple (i,j) tel que $i \neq j$, $\sum\limits_{k=1}^n a_{ik}a_{jk} = 0$. Dans le cas $n = 2$ ou $n = 3$, si on interprète les vecteurs-lignes de M comme les coordonnées de vecteurs du plan ou de l'espace dans un repère orthonormal, on voit que ces conditions équivalent à dire que la famille des vecteurs-lignes est également une base orthonormale, puisque ces formules sont (dans le repère choisi) celles du produit scalaire ordinaire (on verra en Spé comment généraliser ces définitions à $\mathbf{R}^n$, et à un produit scalaire «arbitraire»). La transposition (et le fait que ${}^tM$ est aussi orthogonale) montre alors que la famille des vecteurs-colonnes possède les mêmes propriétés.

2.2 Exemples.

Un calcul simple (laissé en exercice) montre que l'ensemble des matrices de $\mathcal{O}_2$ est d'une des deux formes

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Le premier type correspond aux matrices de $\mathcal{O}_2^+$ et le second à celles de $\mathcal{O}_2^-$. On a vu qu'il s'agit respectivement de représentation de bases directes et inverses; ou, du point de vue des applications linéaires, de matrices de rotations (d'angle θ) et de symétries orthogonales (d'axe $[Y = \tan(\theta/2)X]$).

Il est plus difficile de construire toutes les matrices de $\mathcal{O}_3$; mais en imposant quelques contraintes, les équations donnant les coefficients permettent d'obtenir des exemples non triviaux (la méthode correspond au «procédé d'orthogonalisation de Schmitt», qui sera vu en Spé); on vérifiera ainsi que les deux matrices suivantes sont orthogonales :

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/15 & 2/3 & -11/15 \\ 14/15 & -1/3 & -2/15 \end{pmatrix} \quad ; \quad N = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

3 Diagonalisation.

3.1 Valeurs propres réelles.

Soit $\mathbf{v}$ un vecteur propre réel de l'application f représentée par la matrice orthogonale M (dans une base $\mathcal{B}$). Appelant V le vecteur-colonne des coordonnées de $\mathbf{v}$ dans $\mathcal{B}$, on doit donc avoir $MV = \lambda V$, et par transposition ${}^tVV =^t V({}^tMM)V = ({}^tV^tM)MV = \lambda^2({}^tVV)$; or (avec $\mathbf{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\mathbf{b}_i$) on voit que ${}^tVV = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$, puisque $\mathbf{v}$ est non nul. On en déduit que $\lambda = \pm 1$ (le lecteur cherchera pourquoi cet argument ne se généralise pas aux valeurs propres complexes).

3.2 Sous-espaces propres.

L'ensemble des vecteurs propres correspondant à la valeur propre 1 (le sous-espace propre E_1) est formé des vecteurs invariants par f (l'analogue vectoriel des points fixes d'une transformation affine); et l'étude de f se ramène alors à la restriction de f à un sous-espace supplémentaire de E_1, puisqu'on écrira $f(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1+f(\mathbf{v}_2)$. Plaçons-nous en dimension 2 ou 3 et montrons à présent que si $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ et si $f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$, on a $\mathbf{u}.\mathbf{v} = 0$ (c'est un cas particulier de résultats généraux qui seront vus en Spé) : en effet, avec les mêmes notations que précédemment, on aura ${}^tUV =^t U^tMMV =^t U(-V)$, et donc ${}^tUV = 0$; et cette formule correspond au produit scalaire de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Ainsi, les sous-espaces propres E_1 et E_{-1} sont orthogonaux (au sens qui a été donné au chapitre précédent). Si E_1 est un plan, on en déduit que f est une symétrie orthogonale par rapport à ce plan; plus généralement, si E_1 est une droite, on a vu que l'étude de f dans le plan orthogonal à cette droite permettait d'expliciter complètement f; enfin, le fait que le polynôme caractéristique soit de degré n montre que dans le cas $n = 3$, E_1 ou E_{-1} est non nul.