Introduction à l'algèbre linéaire

L'algèbre linéaire est née (au 19ème siècle) du désir de systématiser et généraliser certaines méthodes et résultats correspondant à des situations «additives», dont nous avons déjà rencontré certains exemples dans les chapitres précédents (équations différentielles linéaires, suites récurrentes, intégration...), et qu'il est possible de définir en général par l'introduction d'une «fonction» (au sens du chapitre 7) possédant la propriété fondamentale, dite de linéarité, $f(\mathbf{X}+\lambda\mathbf{Y}) = f(\mathbf{X}) + \lambda f(\mathbf{Y})$ (que nous étudierons en détail au chapitre 19). Il s'avère que les idées générales ainsi dégagées s'énoncent bien dans un langage emprunté à la géométrie, et où domine la notion de **vecteur**; mais les vecteurs que nous allons définir sont beaucoup plus généraux que ceux de l'espace ordinaire, et nous allons en étudier d'abord un cas particulier (mais représentatif) : les vecteurs de l'espace $\mathbf{R}^n$, avant de généraliser les résultats obtenus au langage plus abstrait des **espaces vectoriels** (chapitre 16).

L'étude des suites de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ nous amènera à introduire quelques concepts importants, et en particulier à tenter de résoudre de manière générale les systèmes d'équations (linéaires); nous définirons alors les **matrices**, représentations commodes de ces systèmes, et que nous étudierons pour leur compte au chapitre 17.

Nous constaterons alors la nécessité d'un langage encore plus général pour analyser les «opérations algébriques»; nous présenterons au chapitre 18 le vocabulaire et les idées correspondantes.

Munis de ces nouveaux outils, nous pourrons aborder (au chapitre 19) l'étude des applications linéaires et de leurs représentations; et nous reviendrons enfin (au chapitre 20) sur le calcul matriciel, à l'aide de deux techniques pratiques : la méthode du pivot et le calcul des déterminants.

16. ESPACES VECTORIELS

1 La notion d'espace vectoriel : l'exemple de $\mathbf{R}^n$

1.1 Introduction : les propriétés des vecteurs.

Les vecteurs de la géométrie ont été inventés pour permettre un véritable «calcul» algébrique avec des objets géométriques, sans passer par la traduction cartésienne des coordonnées. Il s'est avéré que la possibilité d'addition (et de multiplication par un réel) suffisait déjà à fournir un outil assez puissant, et les analogies évidentes avec d'autres calculs «linéaires» ont conduit les mathématiciens du 19$^{\text{ème}}$ siècle à chercher à déterminer la liste des propriétés nécessaires pour un tel calcul, et à rechercher systématiquement toutes les situations où on pouvait l'appliquer. Ce type de démarche s'appelle la méthode axiomatique; elle sera exposée soigneusement à la section **3**. Nous allons commencer par étudier en détail un exemple raisonnablement représentatif, sur lequel nous montrerons l'ensemble des questions qui se posent; la plupart des définitions de cette section et de la suivante se généraliseront sans difficulté, à une importante exception près : la notion de dimension.

1.2 L'espace $\mathbf{R}^n$: suites finies, coordonnées, projections.

On appelle $\mathbf{R}^n$ l'ensemble des suites (finies) de n réels (ayant par exemple la forme $(1, -1, 0, 0, 1 + \sqrt{2}, -1)$, où l'ordre des nombres «compte»); une telle suite (qu'il ne faut bien entendu pas confondre avec les suites numériques «infinies» qu'on a utilisé en Analyse) est appelée un *n-uplet de réels*, et sera notée en général $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (ou plus rigoureusement encore $(x_i)_{1\leq i\leq n}$); on désignera souvent la suite par une seule lettre, surmontée de la «flèche» des vecteurs : $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (ou (dans des textes imprimés) par des caractères gras : $\mathbf{y}= (y_1, y_2, \ldots, y_n)$). $\mathbf{R}^1$ est «identifié» à $\mathbf{R}$, et on remarquera que la «définition» des complexes que nous avons donnée au chapitre 4 permet d'identifier $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}^2$; le sens exact de cette notion d'identification sera précisé au chapitre 18 (sous le nom d'*isomorphisme*).

Le nombre x_3 de la suite $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ est appelé la 3$^{\text{ème}}$ *coordonnée* de $\mathbf{x}$, et la fonction qui à toute suite de $\mathbf{R}^n$ associe sa $k^{\text{ème}}$ coordonnée est appelée la ($k^{\text{ème}}$) projection de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}$; nous verrons (au chapitre 19) que ce type de fonction, appelé *projecteur*, présente des caractéristiques utiles.

1.3 Addition et multiplication.

Les calculs de $\mathbf{R}$ se prolongent facilement à $\mathbf{R}^n$: il suffit de les définir pour chaque coordonnée. Ainsi, on peut écrire $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$, ou $\sqrt{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = (\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n})$. Mais tous ces prolongements n'ont pas le même intérêt (concrètement, ils n'ont pas tous de «sens» géométrique), et on sait que dans l'espace, par exemple, le «produit» des vecteurs peut être défini, mais qu'on utilise en pratique des formules bien plus compliquées (la raison en sera vue au chapitre 21). En fait, à part l'addition, la seule autre opération «ayant un sens» est la multiplication «scalaire» d'un vecteur de $\mathbf{R}^n$ par un nombre réel, définie par $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$; on en déduit la définition de la «combinaison linéaire» $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \beta(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n)$.

1.4 Propriétés élémentaires.

Les opérations qu'on vient de définir ont les propriétés «usuelles» (telles par exemple que $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$), ce qui se démontre facilement (mais c'est un bon exercice de manipulation des notations); la liste exacte des propriétés en question sera précisée en **3**; on retiendra surtout l'existence du «vecteur nul», noté $\vec{0}$ (ou $\mathbf{0}$), valant $\vec{0} = (0,0,\dots,0)$, et tel (comme on pouvait s'y attendre) que pour tout $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^n$ on ait $\vec{0}+\mathbf{x} = \mathbf{x}$. En particulier, on a donc par exemple $x_3(0,0,1,0) = (0,0,x_3,0)$, et chaque vecteur est «somme de ses coordonnées» (le terme officiel est plutôt *composantes*) : $(x_1,x_2,x_3) = (x_1,0,0)+(0,x_2,0)+(0,0,x_3) = x_1(1,0,0)+x_2(0,1,0)+x_3(0,0,1)$.

2 Familles de vecteurs ; dimension.

2.1 Combinaisons linéaires : le problème fondamental.

Plus généralement, on cherche souvent à savoir s'il est ainsi possible d'écrire un vecteur donné en fonction de certains autres. On appellera *famille de vecteurs* une «suite ordonnée» $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_k)$, et *combinaison linéaire* de la famille (avec coefficients α_i) le vecteur $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i\mathbf{v}_i$. Le problème est donc de caractériser les vecteurs qui sont combinaison linéaire d'une famille donnée; comme très souvent en mathématiques, outre ce problème d'existence, on s'intéresse aussi au problème d'unicité correspondant, c'est-à-dire à déterminer si des coefficients différents peuvent correspondre au même vecteur. Déterminer si un vecteur donné $\mathbf{w}$ est combinaison linéaire d'une famille donnée $(\mathbf{v}_i)_{1\le i\le k}$ est équivalent à la résolution d'un système linéaire : posant $\mathbf{v}_1 = (a_{11},a_{12},\dots,a_{1n}); \mathbf{v}_2 = (a_{21},a_{22},\dots,a_{2n}); \dots ; \mathbf{v}_k = (a_{k1},a_{k2},\dots,a_{kn})$ et $\mathbf{w} = (b_1,b_2,\dots,b_n)$, on voit aisément qu'il s'agit de résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{k1}x_k = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{k2}x_k = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{kn}x_k = b_n \end{array}\right.$$

c'est ce qui rend si important la solution complète de cette question. Nous allons l'aborder progressivement, en commençant par introduire une fonction utile, puis en classant certains types de familles.

2.2 La fonction «combinaison linéaire».

Soit $\mathcal{F} = (\mathbf{v}_i)_{1\le i\le p}$ une famille de vecteurs de $\mathbf{R}^n$. Définissons l'application $c\ell_{\mathcal{F}}$ (de $\mathbf{R}^p$ vers $\mathbf{R}^n$) par $c\ell_{\mathcal{F}}((a_i)_{1\le i\le p}) = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i\mathbf{v}_i$; notre objectif est donc de déterminer si tout vecteur de $\mathbf{R}^n$ est atteint par $c\ell_{\mathcal{F}}$, c'est-à-dire si $c\ell_{\mathcal{F}}$ est une surjection; l'unicité revient de même à déterminer si $c\ell_{\mathcal{F}}$ est une injection, et le cas essentiel où le problème fondamental admet (pour chaque $\mathbf{v}$ de $\mathbf{R}^n$) une solution et une seule correspond à «$c\ell_{\mathcal{F}}$ bijective». Nous verrons plus tard (au chapitre 19) que $c\ell_{\mathcal{F}}$ est une application linéaire; certains des résultats que nous allons maintenant démontrer pourraient plus rapidement être obtenus ainsi.

2.3 Générateurs.

Soit $(\mathbf{v}_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille de vecteurs. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles de cette famille forme un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ (on verra en **4** que c'est même un sous-espace vectoriel), que l'on note $\langle \mathbf{v}_i \rangle$, ou $\mathcal{V}\mathtt{ect}(\mathbf{v}_i)$ (on dit que c'est le sous-ensemble *engendré* par la famille $(\mathbf{v}_i)$). Si S est un tel ensemble, on dit que $(\mathbf{v}_i)$ est une *famille génératrice* (ou un système de générateurs) de S. On a vu par exemple plus haut que la famille $\big((1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\big)$ est génératrice de $\mathbf{R}^3$; il est clair que toute famille de vecteurs de S contenant une famille génératrice de S est elle-même génératrice. Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbf{R}^n$, c'est que tout vecteur de $\mathbf{R}^n$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\mathcal{F}$, autrement dit que le système d'équations donné plus haut (avec $\mathcal{F}=(\mathbf{v}_i)$) possède des solutions quelles que soient les valeurs de b_i.

2.4 Familles libres.

Le problème d'unicité mentionné plus haut se ramène à la construction du vecteur nul comme combinaison linéaire : en effet $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{v}_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\beta_i\mathbf{v}_i \iff \sum\limits_{i=1}^{k}(\alpha_i-\beta_i)\mathbf{v}_i=\mathbf{0}$. On dira que la famille $(\mathbf{v})_i$ est *libre* si la seule solution de cette équation est la solution «triviale» $\alpha_i=\beta_i$, autrement dit si $\sum\limits_{i=1}^{k}x_i\mathbf{v}_i=\mathbf{0} \iff x_1=x_2=\ldots=x_k=0$; une famille non libre est dite *liée*. Si la famille $(\mathbf{v}_i)$ est liée, c'est qu'il existe une «relation» entre les $\mathbf{v}_i$ de la forme $x_1\mathbf{v}_1+\cdots+x_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$, où les x_i ne sont pas tous nuls; supposant par exemple que x_3 n'est pas nul, on voit qu'on peut écrire $\mathbf{v}_3$ comme combinaison linéaire des autres $\mathbf{v}_i$ ($\mathbf{v}_3=-(x_1/x_3)\mathbf{v}_1-(x_2/x_3)\mathbf{v_2}-\cdots$); c'est une condition caractéristique, et on en déduit en particulier que si on rajoute à une famille génératrice de S un nouveau vecteur de S, on obtient une famille liée. Inversement, dans une famille libre, on ne peut écrire aucun des vecteurs comme combinaison des autres : on dit qu'ils sont *indépendants*.

2.5 Bases.

Une famille qui est à la fois libre et génératrice de S est appelée une *base de S*. Nous n'allons pour l'instant nous intéresser qu'aux bases de $\mathbf{R}^n$. Un exemple important est la famille $(\mathbf{e}_i)_{1\leq i\leq n}$ définie par $\mathbf{e}_1=(1,0,0,\ldots,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n=(0,0,0,\ldots,1)$; qu'on appelle la base *canonique*. Comme on l'a vu plus haut, le vecteur $\mathbf{v}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ peut s'écrire $\mathbf{v}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\mathbf{e}_i$ (ce qui prouve que la famille $(\mathbf{e}_i)$ est génératrice); on vérifie aisément qu'elle est libre. D'après nos définitions, l'ordre des vecteurs de la base a de l'importance (c'est-à-dire que la base $(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ n'est **pas** la base canonique de $\mathbf{R}^3$). On voit que si $(\mathbf{b}_i)$ est une base de $\mathbf{R}^n$, tous les vecteurs $\mathbf{b}_i$ sont indépendants les uns des autres, et que tout autre vecteur de $\mathbf{R}^n$ est dépendant des $\mathbf{b}_i$. Toute sous-famille d'une base est libre; toute famille contenant une base est génératrice (et liée si elle n'est pas égale à la base).

2.6 Coordonnées dans une base.

Soit $\mathcal{B}=(\mathbf{b}_i)$ une base de $\mathbf{R}^n$. Tout vecteur de $\mathbf{R}^n$ s'écrit (de manière unique par définition) comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$; les coefficients de cette combinaison sont appelés les *coordonnées* du vecteur dans la base, et on notera $\mathbf{v}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)_{(\mathcal{B})}$ le fait que $\mathbf{v}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\mathbf{b}_i$. Le calcul avec des vecteurs peut se ramener à un calcul sur les coordonnées (utilisant justement les formules de calcul dans $\mathbf{R}^n$), idée qui sera précisée au chapitre 18. Le calcul exact des coordonnées de $\mathbf{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dans une base $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_i)$ (connaissant les coordonnées «canoniques» des vecteurs de $\mathcal{B}$) consiste à résoudre le système vu en **2.1**, et la «solution générale» (qui par conséquent associe à chaque n-uplet (x_i) les valeurs des nouvelles coordonnées (x'_i)) est appelée souvent «formules de changement de base»; on en verra la théorie complète au prochain chapitre.

2.7 Le théorème de la dimension.

Nous n'avons pas précisé le nombre de vecteurs de $\mathcal{B}$, mais l'intuition géométrique dans $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$ (qu'on peut «presque» assimiler au plan et à l'espace ordinaire, comme on le verra au chapitre 21), ainsi que l'étude qualitative du système de **2.1** amènent à penser que toutes les bases de $\mathbf{R}^n$ doivent être formées de n vecteurs. Ce résultat peut en effet se démontrer (mais la démonstration est en principe hors-programme); c'est en fait un cas particulier d'un ensemble de résultats plus généraux qu'on verra dans la prochaine section. Le nombre n, caractéristique de toutes les bases, s'appelle la *dimension* de $\mathbf{R}^n$.

2.8 Conséquences : caractérisation des bases.

Soit $\mathcal{F}$ une famille libre de $\mathbf{R}^n$. Ajoutons-lui de nouveaux vecteurs, tant qu'on peut ainsi obtenir encore une famille libre. Quand ce n'est plus possible (on verra plus loin qu'en effet il y a toujours un ensemble «maximum» de tels vecteurs contenant $\mathcal{F}$), la famille $\mathcal{G}$ ainsi obtenue est libre par construction, et tout autre vecteur de $\mathbf{R}^n$ est dépendant de $\mathcal{G}$; $\mathcal{G}$ est donc une base, et par conséquent formée de n vecteurs, ce qui prouve que toute famille libre est formée de $k \leq n$ vecteurs. De plus, cette construction montre que toute famille libre formée de n vecteurs est une base. On montre de même (ce sera fait en exercice) que toute famille génératrice de $\mathbf{R}^n$ est formée de n vecteurs au moins, et que toute famille génératrice composée d'exactement n vecteurs est une base. Ainsi, pour déterminer si $\mathcal{F}$ est une base, il n'est pas nécessaire de contrôler les deux conditions (libre et génératrice) de la définition, mais seulement l'une d'entre elles (et bien sûr le nombre de vecteurs de $\mathcal{F}$).

3 Espaces vectoriels généraux.

Comme on l'a dit, les propriétés de $\mathbf{R}^n$ qu'on vient de voir sont en fait partagées par de nombreux «objets» mathématiques; au $19^{\text{ème}}$ siècle, on s'est rendu compte que des démonstrations de résultats variés n'étaient souvent que des déguisements du même raisonnement. Pour des raisons d'économie dans les rédactions, et aussi dans l'espoir de pouvoir utiliser des outils, d'abord mis au point pour des objectifs limités, dans de nouvelles situations, les partisans de la «méthode axiomatique» ont alors essayé systématiquement de dégager ce qui était commun aux exemples qu'ils connaissaient, et d'isoler les propriétés indépendantes d'où découlait le reste.

Nous allons ici donner leurs résultats concernant l'algèbre linéaire, c'est-à-dire la liste des propriétés qui font qu'un ensemble convenable d'objets mérite d'être appelé «ensemble de vecteurs», ou plus précisément *espace vectoriel*. D'autres définitions analogues, concernant cette fois les «nombres», seront donnés au chapitre 18.

3.1 Axiomatique.

On suppose d'abord qu'on a un ensemble de nombres (les *scalaires*) ; nous avons utilisé $\mathbf{R}$ dans nos exemples précédents, mais on peut aussi utiliser $\mathbf{C}$, et on dit alors qu'on a un espace vectoriel complexe (ou un $\mathbf{C}$-espace vectoriel) ; quand on veut énoncer des résultats généraux, il arrive souvent qu'on note l'ensemble des scalaires ($\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, donc) par la lettre $\mathbf{K}$. Dans les deux cas, un ensemble $\mathcal{E}$, sur lequel on a défini deux opérations (une addition «interne», et une multiplication «externe» par les scalaires, qu'on notera par analogie + et .) est un espace vectoriel (et on dit alors que les éléments de $\mathcal{E}$ sont des vecteurs) s'il vérifie les huit règles suivantes :

«Axiomes» des espaces vectoriels

(A) $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{E})(\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z})$ (associativité)

(C) $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E})(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x})$ (commutativité)

(O) $(\exists \mathbf{O} \in \mathcal{E})(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{E})(\mathbf{x} + \mathbf{O} = \mathbf{x})$ (existence d'un élément neutre)

(S) $(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{E})(\exists \mathbf{x}' \in \mathcal{E})(\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{O})$ (existence d'un opposé)

(On dit alors que «$(\mathcal{E}, +)$ est un groupe abélien»)

($D1$) $(\forall a \text{ (scalaire)})(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E})(a.(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a.\mathbf{x} + a.\mathbf{y})$ (distributivité à droite)

($D2$) $(\forall a, b \text{ (scalaires)})(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{E})((a + b).\mathbf{x} = a.\mathbf{x} + b.\mathbf{x})$ (distributivité à gauche)

(PA) $(\forall a, b \text{ (scalaires)})(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{E})(a(b.\mathbf{x}) = (ab).\mathbf{x})$ (pseudo-associativité)

(U) $(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{E})(1.\mathbf{x} = \mathbf{x})$ (1 est élément unité)

Il est clair que ces règles sont «évidentes» sur les exemples que nous avons déjà vu, mais c'est justement tout le mérite des algébristes qui les ont formulées d'avoir compris leur nécessité (ainsi que ce qu'on appelle leur indépendance, c'est-à-dire le fait qu'elles sont toutes nécessaires), et d'avoir su reconnaître leur présence dans des cas non évidents (dont on verra quelques exemples plus loin).

3.2 Conséquences élémentaires.

Certaines autres règles «évidentes» ne figurent pas dans la liste, car on peut les démontrer à partir de celle-ci. Ce type d'exercice peut paraître assez gratuit (on parle de *formalisme*), mais c'est un bon entraînement à un type de calcul algébrique inhabituel (dont on verra un autre exemple avec les matrices). On peut par exemple démontrer que $(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{E})(0.\mathbf{x} = \mathbf{O})$ (la démonstration sera faite en classe), ou encore la «régularité» de la multiplication (c'est-à-dire que $a.\mathbf{x} = \mathbf{O} \Rightarrow a = 0$ ou $\mathbf{x} = \mathbf{O}$). Le chapitre 18 explorera plus systématiquement les techniques adaptées à ce genre de situation. Mais la conséquence prévisible de la liste des huit «axiomes» est que le calcul «élémentaire» dans $\mathcal{E}$ vérifie les mêmes règles que le calcul dans $\mathbf{R}^n$; en particulier on utilisera la même terminologie pour parler par exemple de combinaison linéaire, ou de familles de vecteurs, définitions qui seront redonnées plus bas.

3.3 Exemples ; la notion de sous-espace.

Il est clair que $\mathbf{R}^n$ est un espace vectoriel (sur $\mathbf{R}$) ; on définit de même l'espace $\mathbf{C}^n$, qui est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. Des exemples plus intéressants sont fournis par les fonctions numériques : l'ensemble de toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0; 1]$ par exemple, l'ensemble des polynômes de degré ≤ 4, l'ensemble des suites numériques (qui sont des fonctions de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) ou encore celui des solutions de l'équation différentielle $y''+xy'+y=0$ (ce dernier exemple est assez intéressant pour mériter une étude soignée, qui sera faite en classe). La vérification des huit règles est néanmoins tout à fait inutile en pratique : la plupart des espaces vectoriels qu'on peut rencontrer sont en fait du type précédent, c'est-à-dire un ensemble de «vecteurs» soumis à une certaine condition (le seul cas un peu délicat, paradoxalement, est celui des vecteurs «ordinaires» du plan ou de l'espace, comme on le verra au chapitre 21, où l'on montrera qu'en particulier la règle de distributivité à droite est équivalente au théorème de Thalès). Il suffit alors de vérifier que les opérations + et . respectent ces conditions, autrement dit qu'on ne risque pas de sortir de l'ensemble qu'on a défini en en combinant les éléments. C'est ce qui amène à l'importante notion de sous-espace.

4 Sous-espaces vectoriels.

4.1 Définitions.

On dit que $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ est un *sous-espace vectoriel* de $\mathcal{E}$ si c'est un espace vectoriel (pour les mêmes opérations que celles de $\mathcal{E}$), ce qui en pratique revient à dire qu'il n'est pas vide et que (1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathcal{S})$ et (2) $(\mathbf{x} \in \mathcal{S} \Rightarrow a.\mathbf{x} \in \mathcal{S})$; on verra en classe qu'on peut remplacer (1) et (2) par (3) : $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathbf{x}+a.\mathbf{y} \in \mathcal{S})$. (En général, on vérifie (3) et on contrôle que $\mathbf{O} \in \mathcal{S}$). Les exemples les plus importants sont de l'une des deux formes suivantes :

— $\mathcal{S}$ est définie par une «condition» : «l'ensemble des polynômes dont tous les coefficients sont égaux» ; «les suites convergentes» ; «les vecteurs (x, y, z) de $\mathbf{R}^3$ tels que $x+y+2z=0$»

— $\mathcal{S}$ est «engendré» par un ensemble $\mathcal{A}$ (on note alors $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A} \rangle$, ou encore $\mathcal{S} = \mathcal{V}\mathtt{ect}(\mathcal{A})$), c'est-à-dire que $\mathcal{S}$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{A}$ (ce type sera étudié plus précisément plus bas).

4.2 Familles de vecteurs.

Rappelons d'abord les définitions du chapitre précédent : si $\mathcal{F} = (\mathbf{v}_i)$ est une famille de vecteurs de $\mathcal{S}$, on dit que $\mathcal{F}$ est *libre* si $\sum a_i \mathbf{v}_i = \mathbf{O} \iff a_1 = a_2 = \ldots = 0$; que $\mathcal{F}$ est *génératrice* (de $\mathcal{S}$) si tout vecteur de $\mathcal{S}$ est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$, et que $\mathcal{F}$ est une *base* de $\mathcal{S}$ si $\mathcal{F}$ est libre et génératrice. (Pour être tout à fait rigoureux, il faudrait dire que ces définitions s'étendent à des familles infinies, avec la convention supplémentaire que les $\sum$ des combinaisons linéaires doivent se comprendre sur un ensemble fini de vecteurs de la famille. Mais nous n'utiliserons cette généralisation que comme abus de langage).

On voit ainsi par exemple que la famille de polynômes $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ (considérés comme des vecteurs de $\mathbf{R}[X]$) est libre, et engendre le sous-espace de $\mathbf{R}[X]$ formé des polynômes de degré $\leq n$ (sous-espace que l'on note traditionnellement $\mathbf{R}_n[X]$); d'autres traductions analogues (de résultats évidents !) dans ce nouveau langage seront données en classe.

4.3 Le théorème de la base incomplète.

Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ deux familles de vecteurs de $\mathcal{S}$, avec $\mathcal{F}$ libre et $\mathcal{G}$ génératrice de $\mathcal{S}$. Alors

Théorème de la base incomplète. *Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{S}$ telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$*

La démonstration de ce théorème (dans le cas «fini», c'est-à-dire si $\mathcal{G}$ est une famille finie) procède par «récurrence partielle» : on adjoint à $\mathcal{F}$ des vecteurs de $\mathcal{G}$ tant que la famille résultante est libre, et on montre alors (par l'absurde) que la famille ainsi obtenue est génératrice. Le nom du théorème vient de ce qu'on a complété la famille $\mathcal{F}$ (par des vecteurs de $\mathcal{G}$) pour obtenir une base, mais on pourrait inversement retirer des vecteurs de $\mathcal{G}$ (non dans $\mathcal{F}$) tant que la famille reste génératrice; ce sera le sujet d'un DM.

Le théorème de la base incomplète est tout à fait utilisable en pratique, comme on le verra en exercice; mais il n'est pas clair que cette méthode puisse se généraliser au cas où $\mathcal{G}$ est infinie. Si on ne peut en effet trouver ainsi de famille génératrice finie, on dit que $\mathcal{S}$ est de dimension infinie (c'est par exemple le cas de $\mathbf{R}[X]$ tout entier, comme on le démontre aisément en réfléchissant aux degrés des polynômes dans une famille finie). Le théorème de la base incomplète est encore vrai dans ce cas (avec la généralisation sur les familles infinies mentionnée plus haut), mais la démonstration nécessite des méthodes (dites de théorie des ensembles) dépassant largement les possibilités du programme.

4.4 Dimension et rang.

Le résultat admis en **2** se généralise ainsi : si $\mathcal{S}$ possède une famille génératrice finie (et donc une base finie d'après le théorème de la base incomplète, en prenant $\mathcal{F} = \emptyset$), toutes les familles libres de $\mathcal{S}$ sont finies, et toutes les bases de $\mathcal{S}$ ont le même nombre de vecteurs (ce résultat est souvent appelé «théorème de la dimension»). La démonstration (sans idées nouvelles, mais très technique) est hors-programme; le nombre ainsi défini s'appelle la *dimension* de $\mathcal{S}$, et se note $\dim(\mathcal{S})$. Il est utile de se rappeler des quelques exemples suivants : $\dim(\mathbf{R}^n) = n$; $\dim(\mathbf{C}) = 2$ (il s'agit là de la dimension «sur $\mathbf{R}$»); dim («l'ensemble des polynômes P tels que $\deg(P) \leq n$») $= n+1$ (ce dernier ensemble se note $\mathbf{R}_n[X]$); dim («l'ensemble des solutions de $ay'' + by' + c = 0$») $= 2$ (qui seront commentés en classe); on pensera aussi à se méfier des cas où le corps des scalaires peut prêter à confusion (ainsi, avec une généralisation évidente des notations, on a $\dim_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^3) = 3$, mais $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^3) = 6$).

Les «petits» sous-espaces sont facilement analysables : tout d'abord, tout sous-espace contient $\mathbf{O}$, l'ensemble $\{\mathbf{O}\}$ est donc le plus petit sous-espace possible (et il est inclus dans tous les autres); on l'appelle le sous-espace nul, et par convention on dit qu'il est de dimension 0 (et que sa base est vide). Si un sous-espace $\mathcal{S}$ n'est pas nul, il contient au moins un vecteur non nul, donc libre; si ce vecteur constitue une base (et donc si $\dim(\mathcal{S}) = 1$), on dit que $\mathcal{S}$ est une *droite vectorielle*; $\mathcal{S}$ est alors l'ensemble des vecteurs de la forme $a.\mathbf{v}_1$. Les sous-espaces de dimension 2 (de la forme $\{a.\mathbf{v}_1 + b.\mathbf{v}_2\}$ où $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ ne sont pas «colinéaires», c'est-à-dire qu'on n'a pas $\mathbf{v}_2 = k.\mathbf{v}_1$) sont appelés des *plans vectoriels*.

Si $\mathcal{F} = (\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq k}$ est une famille finie (quelconque) de vecteurs de $\mathcal{E}$, l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathcal{F}$ (de la forme $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i.\mathbf{v}_i$) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ (il est non vide, car il contient $\mathbf{O} = \sum\limits_{i=1}^{k} 0.\mathbf{v}_i$, et $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i.\mathbf{v}_i + \lambda \sum\limits_{i=1}^{k} b_i.\mathbf{v}_i = \sum\limits_{i=1}^{k} (a_i + \lambda b_i).\mathbf{v}_i$). On le note par $\mathcal{V}\mathtt{ect}(\mathcal{F})$ (ou $\mathcal{V}\mathtt{ect}(\mathbf{v}_i)$), et sa dimension (nécessairement finie et inférieure à k) s'appelle le *rang* de la famille $\mathcal{F}$, et se note en général $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$.

La détermination pratique du rang d'une famille se fait en adjoignant des vecteurs successifs de $\mathcal{F}$, et en éliminant ceux qui sont dépendants des vecteurs précédents ; le fait que le rang est un «invariant» de $\mathcal{F}$ fait que l'ordre des choix (et même la méthode exacte d'élimination) n'a pas d'importance dans le nombre final de vecteurs obtenus. On verra d'autre part au chapitre 20 une méthode de calcul plus commode quand le rang est grand, en utilisant la méthode du pivot. On remarquera enfin que si $\dim(\mathcal{E}) = n$, le rang de toute famille de $\mathcal{E}$ est $\leq n$.

5 Sommes de sous-espaces.

5.1 Définitions.

Soit $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux sous-espaces de $\mathcal{E}$. L'ensemble $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ est un sous-espace de $\mathcal{E}$, comme on le démontre aisément. Il n'en est pas de même de $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ (il suffit de remarquer, par exemple, que la réunion des deux droites vectorielles $\{a\vec{\imath}\}$ et $\{a\vec{\jmath}\}$ ne contient pas $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$, si $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont indépendants), mais le sous-espace engendré par ce dernier (c'est-à-dire $\mathcal{V}\mathtt{ect}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$) se comporte un peu comme une «union» ; on l'appelle la *somme* de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, et on le note $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$.

5.2 Sommes directes.

Si les deux sous-espaces $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ n'ont que le vecteur nul $\mathbf{O}$ en commun, on dit qu'ils sont *indépendants*, et que leur somme est *directe*; on note alors cette somme par $\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ (autrement dit, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2 \iff \mathcal{S} = \mathcal{V}\mathtt{ect}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$ et $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{\mathbf{O}\}$.) On verra plus tard plusieurs exemples importants de cette situation ; un cas particulier fréquent est $\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2 = \mathcal{E}$, on dit alors que $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont *supplémentaires*. En particulier, si $\mathcal{S}$ est supplémentaire d'une droite vectorielle, on dit que $\mathcal{S}$ est un *hyperplan* de $\mathcal{E}$. Ainsi, par exemple, $\mathcal{V}\mathtt{ect}((0, 1, 0))$ et $\{(a, 0, b)_{(a,b)\in\mathbf{R}^2}\}$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$; un exemple beaucoup plus intéressant (et constituant un exercice-type) est (dans l'espace des applications numériques) l'ensemble des applications paires et celui des applications impaires.

Une condition équivalente à la supplémentarité de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ est que tout vecteur $\mathbf{v}$ de $\mathcal{E}$ soit représentable de manière unique sous la forme $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, où $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont respectivement des vecteurs de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ (l'existence vient de ce que $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = \mathcal{E}$, l'unicité de $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{\mathbf{O}\}$). On reverra cette condition en étudiant les projecteurs au chapitre 19.

5.3 La formule de la dimension.

En dimension finie, les questions précédentes s'étudient plus aisément à l'aide des bases de $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. En effet, complétons (à l'aide du théorème de la base incomplète) une base de $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ pour obtenir des bases de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$. On vérifie aisément que l'ensemble constitue une base de $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$; en comptant les différents vecteurs qui interviennent dans les quatre bases, on obtient l'importante **formule de la dimension** :

$$\dim(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2) = \dim(\mathcal{S}_1) + \dim(\mathcal{S}_2) - \dim(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2)$$

On en déduit une «caractérisation» des sommes directes : on a $\dim(\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2) = \dim(\mathcal{S}_1) + \dim(\mathcal{S}_2)$ (une rédaction correcte est laissée au lecteur) ; et si $\dim(\mathcal{E}) = n$, $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ supplémentaires $\Rightarrow \dim(\mathcal{S}_2) = n - \dim(\mathcal{S}_1)$ (la réciproque n'étant pas vraie).

La même technique permet enfin de construire un supplémentaire $\mathcal{S}'$ (qui n'est pas unique en général) pour tout sous-espace $\mathcal{S}$: on se contente de compléter une base de $\mathcal{S}$ pour obtenir une base de $\mathcal{E}$, et de prendre pour $\mathcal{S}'$ le sous-espace engendré par les vecteurs qu'on a ajoutés ; on peut alors en déduire que les hyperplans de $\mathcal{E}$ sont exactement les sous-espaces de $\mathcal{E}$ de dimension $n-1$.

Exercices

1 Familles de $\mathbf{R}^n$

1 ($\star$) La famille de vecteurs (de $\mathbf{R}^6$)

$$\mathcal{F} = \big((1,0,0,0,0,0);(1,1,0,0,0,0);(1,2,3,4,5,6)\big)$$

est-elle libre ? génératrice ?

2 ($\star\star$) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la famille (de $\mathbf{R}^3$)

$$\mathcal{F} = \big((x,1,0);(0,1-x,1);(1,1,x)\big)$$

est liée.

3 ($\star\star\star$) Déterminer les sous-familles de

$$\mathcal{F} = \big((1,1,0,0);(0,1,1,0);(0,0,1,1);(1,0,0,-1);(1,1,1,-1)\big)$$

qui sont des bases de $\mathbf{R}^4$.

T 28 Soit $(\mathbf{e}_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{F} = (\mathbf{v}_i)_{1\leq i\leq n}$ la famille définie par :

$$\mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^{i} \mathbf{e}_k \text{ (pour tout } i \in [\![1,n]\!]\text{)}.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est une base, et déterminer dans cette base les coordonnées du vecteur $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$.

2 Espaces vectoriels généraux.

4 ($\star\star$) «Traduire» la phrase suivante : «Les fonctions dérivables sur $[0,1]$, dont la dérivée est nulle en $1/2$, forment un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ ». Cette affirmation est-elle vraie ?

5 ($\star\star$) Montrer que les polynômes de degré ≤ 3 dont les dérivées premières et secondes sont nulles en 1 forment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$. Déterminer explicitement l'ensemble de ces polynômes, et en déduire sa dimension.

6 ($\star\star$) Montrer que l'ensemble $\mathbf{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Quel est la dimension (réelle) du sous-espace vectoriel $\mathbf{C}_3[X]$ formé des polynômes de degré ≤ 3 ?

7 ($\star$) Soit $\mathcal{F} = (\mathbf{v}_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille quelconque de vecteurs de $\mathcal{E}$; montrer que la famille $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i\}$ est liée

> **T 29** Soit $\mathcal{F} = (f_k)_{1\leq k\leq n}$ la famille des applications définies par $f_k : x \mapsto \cos kx$. Montrer que c'est une famille libre (de l'espace des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$) :
>
> a) en dérivant deux fois une combinaison linéaire nulle des f_k, en éliminant alors le dernier terme, et en raisonnant par récurrence ;
>
> b) en exprimant une telle combinaison comme la partie réelle d'un polynôme en $z = e^{ix}$, et en remarquant que ce polynôme vérifie $P(z) + P(1/z) = 0$ pour tout z de module 1.

8 ($\star\star$) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}$. Montrer que la famille de vecteurs de $\mathcal{E}$ définie par $\mathcal{F} = (x \mapsto e^{a_1 x}, x \mapsto e^{a_2 x}, \ldots, x \mapsto e^{a_n x})$ est libre si les constantes a_i sont tous distinctes (écrire une relation de dépendance entre les $e^{a_i x}$, et raisonner par récurrence en utilisant la limite en $+\infty$.)

9 ($\star\star\star$) Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de réels distincts 2 à 2, $\mathcal{F} = (P_i(X))_{1\leq i\leq n}$ une famille de polynômes tels que (pour tout i et k) $i \neq k \Rightarrow P_i(x_k) = 0$ et que (pour tout k) $P_k(x_k) \neq 0$. Montrer que $\mathcal{F}$ est libre. En déduire que la famille des polynômes de Lagrange $P_k(X) = \prod_{i\neq k} \dfrac{X - x_i}{x_k - x_i}$ constitue une base de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.

3 Sous-espaces, dimension et rang.

10 ($\star$) Montrer que $S \subset S' \Rightarrow \dim(S) \leq \dim S'$. La réciproque est-elle vraie ?

11 ($\star\star$) Montrer que l'ensemble des vecteurs de $\mathbf{R}^4$ de la forme $(a, a+b, b+c, a)$ est un sous-espace vectoriel ; déterminer sa dimension et en donner une base.

12 ($\star\star\star$) Montrer que l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) de $\mathbf{R}^4$ tels que $x + 2y - 3z = t$ est un sous-espace vectoriel ; déterminer sa dimension et en donner une base.

13 ($\star\star$) Déterminer (suivant les valeurs de x) le rang de la famille (de $\mathbf{R}^4$)

$$\mathcal{F} = \big((1, 1, x, x); (1, x, 1, x); (1, 1, 0, 0)\big)$$

14 ($\star\star$) Le sous-espace de $\mathbf{R}[X]$ formé des polynômes qui s'annulent en 1 et en 2 (on vérifiera que c'est bien un sous-espace vectoriel) est-il de dimension finie ?

15 ($\star\star\star$) Dans l'espace des fonctions continues (de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$), déterminer le rang des familles $\mathcal{F}_1 = ([x \mapsto e^x], [x \mapsto x], [x \mapsto 1])$ et $\mathcal{F}_2 = ([x \mapsto \cos^2 x], [x \mapsto \cos 2x], [x \mapsto 1])$ (justifier vos réponses)

4 Sommes, sommes directes, supplémentaires.

16 ($\star$) Soit deux plans vectoriels distincts d'un espace de dimension 3. Montrer que leur intersection est une droite vectorielle.

17 ($\star\star$) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) de $\mathbf{R}^4$ tels que $x + 2y - 3z = t$ (on a vu dans l'exercice **3** que c'est un hyperplan); déterminer un sous-espace supplémentaire. Plus généralement, soit $\mathcal{D} = \{k\mathbf{v}\}$ une droite vectorielle de $\mathbf{R}^4$; à quelle condition sur $\mathbf{v}$ est-elle supplémentaire de $\mathcal{E}$?

T 30 Soit S_1 l'ensemble des polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que $P(1) = P'(1) = P''(1)$, et S_2 l'ensemble des polynômes de la forme $aX^2 + bX^3$. Montrer que S_1 et S_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}[X]$.

18 ($\star\star$) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des polynômes P de $\mathbf{R}[X]$ tels que $P(1) = P'(1) = 0$, $\mathcal{F} = \mathbf{R}_1[X]$ l'ensemble des polynômes de degré ≤ 1; montrer que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}[X]$ (ne pas oublier de vérifier **toutes** les conditions)

16. ESPACES VECTORIELS

Plan

16. ESPACES VECTORIELS

(Formulaire)

1 Vecteurs de $\mathbf{R}^n$.

Définition 1. 1. *On appelle* **suite finie de** n **éléments de** A *(ou* n-**uplet***) une application de l'ensemble* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *dans l'ensemble* A. *Si* $\mathbf{s}$ *est une telle suite, on note* s_k *(élément de* A*) l'image de* k *par* $\mathbf{s}$, *et on écrit souvent* $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *(ou plus rigoureusement* $\mathbf{s} = (s_k)_{1\leq k\leq n}$*). On note* A^n *l'ensemble de ces suites,* $\mathbf{R}^n$ *est donc l'ensemble des suites (finies) de* n *réels.*

Définition 1. 2. *Si* $\mathbf{x}$ *est un vecteur (un élément) de* $\mathbf{R}^n$, *on dit que le nombre* x_k *est la* $k^{\text{ème}}$ **coordonnée** *de* $\mathbf{x}$ *; la fonction qui à* $\mathbf{x}$ *associe* x_k *est appelée la (*$k^{\text{ème}}$*)* **projection de** $\mathbf{R}^n$ **sur** $\mathbf{R}$.

Définition 1. 3. *On définit les deux opérations fondamentales de* $\mathbf{R}^n$ *par les «formules»* $(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i)$ *et* $\alpha.(x_i) = (\alpha x_i)$ *; plus généralement, si* $(\mathbf{v}_k)_{1\leq k\leq p}$ *est une famille de vecteurs, avec* $\mathbf{v}_k = (v_{1k}, v_{2k}, \ldots, v_{nk})$, *on appelle* **combinaison linéaire de la famille** *(avec coefficients* α_k*) le vecteur*

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k.\mathbf{v}_k = \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k v_{1k}, \sum_{k=1}^{p} \alpha_k v_{2k}, \ldots, \sum_{k=1}^{p} \alpha_k v_{nk}\right).$$

Définition 1. 4. *La famille* $(\mathbf{e}_k)$ *définie par* $\mathbf{e}_k = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ *(toutes les coordonnées sont nulles sauf la* $k^{\text{ème}}$*) s'appelle la* **base canonique** *de* $\mathbf{R}^n$.

(Les définitions générales des bases (voir plus loin) justifient cette appellation)

2 Espaces vectoriels, familles de vecteurs.

Définition 2. 1. *Soit* $\mathbf{K}$ *l'un des ensembles* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$ *; dans ce contexte, les éléments de* $\mathbf{K}$ *s'appellent des* **scalaires**. *Soit* $\mathcal{E}$ *un ensemble, sur lequel on a défini deux opérations (plus précisément, deux applications, l'une allant de* $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ *vers* $\mathcal{E}$ *(une addition «interne», notée + par analogie) et l'autre allant de* $\mathbf{K} \times \mathcal{E}$ *vers* $\mathcal{E}$ *(une multiplication «externe» par les scalaires, notée . par analogie)).* $\mathcal{E}$ *est un* $\mathbf{K}$-**espace vectoriel** *(et on dit alors que les éléments de* $\mathcal{E}$ *sont des* **vecteurs***) si ces opérations vérifient les huit règles suivantes*

(A) $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{E})(\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z})$ (associativité)

(C) $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E})(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x})$ (commutativité)

(N) $(\exists \mathbf{O} \in \mathcal{E})(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{E})(\mathbf{x} + \mathbf{O} = \mathbf{x})$ (existence d'un élément neutre)

(S) $(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{E})(\exists \mathbf{x}' \in \mathcal{E})(\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{O})$ (existence d'un opposé)

$(D1)$ $(\forall a \in \mathbf{K})(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E})(a.(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a.\mathbf{x} + a.\mathbf{y})$ (distributivité à droite)

$(D2)$ $(\forall a, b \in \mathbf{K})(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{E})((a + b).\mathbf{x} = a.\mathbf{x} + b.\mathbf{x})$ (distributivité à gauche)

(PA) $(\forall a, b \in \mathbf{K})(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{E})(a.(b.\mathbf{x}) = (ab).\mathbf{x})$ (pseudo-associativité)

(U) $(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{E})(1.\mathbf{x} = \mathbf{x})$ (1 est élément unité)

Les «règles de calcul» élémentaires dans $\mathbf{R}^n$ sont encore vérifiées dans tout $\mathbf{K}$-espace vectoriel, ce qui autorise les calculs de combinaisons linéaires correspondant à la définition donnée plus haut.

Définition 2. 2. *Une famille de vecteurs de $\mathcal{E}$, $(\mathbf{v}_k)_{1\leq k\leq p}$ est* **génératrice** *si tout vecteur de $\mathcal{E}$ est combinaison linéaire de cette famille, c'est-à-dire si*

$$(\forall \mathbf{v} \in \mathcal{E})(\exists \alpha_k \in \mathbf{K})(\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k.\mathbf{v}_k)$$

Définition 2. 3. *Une famille de vecteurs de $\mathcal{E}$ $(\mathbf{v}_k)_{1\leq k\leq p}$ est* **libre** *si la seule combinaison linéaire nulle de cette famille est celle dont les coefficients sont nuls, c'est-à-dire si*

$$(\forall \alpha_k \in \mathbf{K})(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k.\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0)$$

On dit que les vecteurs d'une famille libre sont **indépendants** *les uns des autres.*

Définition 2. 4. *On dit qu'une famille est* **liée** *si elle n'est pas libre; une combinaison linéaire nulle (non triviale, c'est-à-dire à coefficients non nuls) de cette famille s'appelle une* **relation de dépendance** *entre ses vecteurs.*

Définition 2. 5. *Une famille de vecteurs de $\mathcal{E}$ est une* **base** *si elle est libre et génératrice, c'est-à-dire si tout vecteur de $\mathcal{E}$ est combinaison linéaire de ces vecteurs* **d'une seule manière**.

Définition 2. 6. *Si $(\mathbf{v}_k)_{1\leq k\leq p}$ est une base de $\mathcal{E}$, les coefficients (α_k) de l'unique combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k.\mathbf{v}_k = \mathbf{v}$ s'appellent les* **coordonnées** *de $\mathbf{v}$ dans cette base.*

En particulier, dans le cas de $\mathbf{R}^n$, les coordonnées dans la base canonique (dites encore **coordonnées canoniques**) sont celles qui ont été définies en **1.1**.

3 Sous-espaces vectoriels.

Définition 3. 1. *Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel. S est un* **sous-espace vectoriel de** *$\mathcal{E}$ si c'est un sous-ensemble* **non vide** *de $\mathcal{E}$ stable pour l'addition et la multiplication, ce qui revient à montrer que*

$$(\forall(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S^2)(\forall \lambda \in K)(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in S).$$

Définition 3. 2. *Si $\mathcal{F} = (\mathbf{v}_i)$ est une famille de vecteurs de S, $\mathcal{F}$ est* **libre** *si $\sum a_i\mathbf{v}_i = \mathbf{O} \iff a_1 = a_2 = \ldots = 0$; $\mathcal{F}$ est* **génératrice** *(de S) si tout vecteur de S est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$, et $\mathcal{F}$ est une* **base** *de S si $\mathcal{F}$ est libre et génératrice (de S).*

Définition 3. 3. *Si $\mathcal{F} = (\mathbf{v}_i)$ est une famille de vecteurs de $\mathcal{E}$, on appelle* **sous-espace engendré par la famille** *$\mathcal{F}$ (et on note $\langle\mathcal{F}\rangle$, ou $\mathcal{V}\mathrm{ect}(\mathcal{F})$) l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$; on montre que c'est un sous-espace de $\mathcal{E}$, dont $\mathcal{F}$ est (évidemment) génératrice.*

Définition 3. 4. *On montre (théorème de la dimension) que toutes les bases d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ (s'il en existe) ont le même nombre de vecteurs; on appelle alors* **dimension** *de $\mathcal{E}$ (notée $\dim(\mathcal{E})$) ce nombre, et on dit que $\mathcal{E}$ est de* **dimension finie**. *Sinon, cela veut dire qu'il existe des familles libres aussi grandes que l'on veut, et qu'il n'y a pas de familles génératrices; on dit alors que $\mathcal{E}$ est de* **dimension infinie**.

Définition 3. 5. *Si $\dim(\mathcal{E}) = 1$, on dit que $\mathcal{E}$ est une* **droite vectorielle**. *Si $\dim(\mathcal{E}) = 2$, on dit que $\mathcal{E}$ est un* **plan vectoriel**. *Si $\dim(\mathcal{E}) = n$, et que $\dim(S) = n-1$ (o- S est un sous-espace de $\mathcal{E}$), on dit que S est un* **hyperplan** *(vectoriel) de $\mathcal{E}$; c'est un cas particulier de la définition qui sera donnée plus bas.*

Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ deux familles de vecteurs de $\mathcal{S}$, avec $\mathcal{F}$ libre et $\mathcal{G}$ génératrice de $\mathcal{S}$. Alors :
Théorème de la base incomplète. *Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{S}$ telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$*

Définition 3. 6. *On appelle* **rang** *d'une famille $\mathcal{F} = (\mathbf{v}_i)_{1\leq i\leq p}$ de $\mathcal{E}$ la dimension du sous-espace $\mathcal{V}\mathrm{ect}(\mathcal{F})$; on le note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$. C'est le nombre de vecteurs des plus grandes familles libres contenues dans $\mathcal{F}$. On a $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leq p$, et si $\dim(E) = n$, $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leq n$.*

4 Sommes de sous-espaces.

Définition 4. 1. *Soit S_1 et S_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}$. On appelle* **somme** *de S_1 et S_2 le sous-espace de $\mathcal{E}$ engendré par S_1 et S_2, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ de la forme $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, o- $\mathbf{v}_1 \in S_1$ et $\mathbf{v}_2 \in S_2$.*

Définition 4. 2. *Si $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$, on dit que les deux sous-espaces S_1 et S_2 sont* **indépendants**, *et que leur somme est* **directe**; *on note alors cette somme par $S_1 \oplus S_2$ (autrement dit, $S = S_1 \oplus S_2 \iff S = \mathcal{V}\mathrm{ect}(\mathcal{S}_1 \cup S_2)$ et $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{O}\}$.)*

Définition 4. 3. *Si $S_1 \oplus S_2 = \mathcal{E}$, on dit que les deux sous-espaces de $\mathcal{E}$, S_1 et S_2, sont* **supplémentaires**.

En particulier,

Définition 4. 4. *On dit que H est un* **hyperplan** *de E s'il est supplémentaire d'une droite vectorielle de E, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace de E, D, tel que $\dim D = 1$ (ou encore que $D = \{k\mathbf{v}\}_{k\in\mathbf{K}}$) et $H \oplus D = E$.*

On a le théorème suivant : S_1 et S_2 sont supplémentaires si et seulement si tout vecteur $\mathbf{v}$ de $\mathcal{E}$ est représentable de manière unique sous la forme $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, o- $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont respectivement des vecteurs de S_1 et S_2.

En dimension finie, on obtient l'importante **formule de la dimension** :

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2).$$