11. TECHNIQUES D'APPROXIMATION

1 Comparaison des fonctions.

1.1 Introduction : la notion d'approximation.

On s'intéresse dans ce chapitre à des techniques ayant pour but de donner de «bonnes» valeurs approchées de fonctions, quand x se rapproche de a ou tend vers l'infini. L'objectif est d'obtenir des valeurs faciles à calculer et à manipuler, et aussi proches que possible de la fonction initiale. Les approximations affines du précédent chapitre donnent un modèle possible, on va le généraliser en cherchant surtout des approximations polynomiales, et en s'intéressant à la notion d'approximations successives, précisant à chaque étape l'erreur commise. Ainsi, si x est «petit» (proche de 0), la continuité nous apprend que $\sqrt{1+x}$ est proche de 1, mais cette information est moins utile que l'approximation affine tangente $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2$, elle-même moins précise que $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2 - x^2/8$. Mais ces deux dernières formules utilisent le symbole «flou» $\simeq$, qui ne permet pas de se rendre compte que la seconde est meilleure ; nous allons définir des notations plus rigoureuses.

1.2 Fonctions négligeables et équivalentes.

Plaçons-nous dans les mêmes conditions de comportement de x pour toutes les fonctions étudiées. Dire qu'une «erreur» $h(x)$ est «négligeable» par rapport à la fonction étudiée $f(x)$, c'est dire que l'erreur relative commise en remplaçant $f(x)$ par $f(x) + h(x)$ est très petite. On systématise cette idée en définissant : «$h(x)$ est négligeable devant $f(x)$ (au voisinage de a ou de $\pm\infty$)» par $\lim\limits_{x\to a} h(x)/f(x) = 0$ (ou $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)/f(x) = 0$) ; et on note cette propriété par «$h \ll f$» (ou plus précisément par $h \underset{a}{\ll} f$) ; ou par abus de langage $h(x) \ll f(x)$. La relation $\ll$ se comporte un peu comme l'ordre ordinaire, mais il faut se méfier des réflexes acquis : le signe de h et f n'intervient pas et on a par exemple $x \underset{+\infty}{\ll} x^2$, mais aussi $x \underset{+\infty}{\ll} -x^2$!

Une autre erreur grave serait de croire que $f \ll g$ entraîne $\lim f = 0$: seule l'erreur **relative** f/g est «négligeable» !

Il est utile de savoir «par cœur» les «échelles» (on verra une définition précise plus bas) :

$$\frac{1}{x} \underset{+\infty}{\ll} 1 \underset{+\infty}{\ll} \ln x \underset{+\infty}{\ll} x \underset{+\infty}{\ll} x^2 \underset{+\infty}{\ll} \dots \underset{+\infty}{\ll} e^x$$

et

$$x^n \underset{0}{\ll} \dots \underset{0}{\ll} x^2 \underset{0}{\ll} x \underset{0}{\ll} 1 \underset{0}{\ll} \ln x \underset{0}{\ll} \frac{1}{x};$$

on démontre aisément la «transitivité» $f \ll g$ et $g \ll h \Rightarrow f \ll h$ (en remarquant que l'on a $\lim f/h = \lim f/g \times g/h$).

Si on peut négliger h par rapport à f, c'est que f et $f + h$ sont en un certain sens «équivalentes» ; un calcul simple de limites amène à poser la définition $f \sim g$ (ou plus précisément $f \underset{a}{\sim} g$, qui se lit «f équivaut à g (ou f et g sont équivalentes) au voisinage de a» si $\lim\limits_{a} f/g = 1$. Plus rigoureusement encore, et pour éviter de devoir traiter à part le cas «$g = 0$», on dira par exemple que $f \underset{a}{\sim} g$ si il existe une fonction $\varepsilon(x)$ telle que $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$ et que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$; cette forme est d'ailleurs fréquemment celle qu'il convient d'utiliser dans les démonstrations, la fonction $\varepsilon(x)$ étant souvent donnée, ou apparaissant de manière naturelle.

La relation $\sim$ est une «relation d'équivalence», c'est-à-dire qu'elle vérifie les trois propriétés suivantes : $f \sim f$ (réflexivité), $(f \sim g \iff g \sim f)$ (symétrie) et ($f \sim g$ et $g \sim h) \Rightarrow f \sim h$ (transitivité); et elle est «compatible» avec $\ll$, c'est-à-dire que $h \ll f$ et $f \sim g \Rightarrow h \ll g$. Tout ceci permet un certain «classement» des fonctions (un «ordre partiel»), en se rappelant toutefois que cet ordre dépend du voisinage choisi, puisque $x^2 \underset{\infty}{\ll} x^3$, mais que $x^2 \underset{1}{\sim} x^3$ et que $x^3 \underset{0}{\ll} x^2$!

D'autre part, ces relations sont compatibles avec certains calculs, essentiellement multiplicatifs; ce qui autorise à remplacer certaines fonctions par d'autres, équivalentes et plus simples : voici les résultats les plus importants

> Équivalents "autorisés"
>
> $$f_1 \sim f_2; \quad g_1 \sim g_2 \quad \Rightarrow \quad f_1 g_1 \sim f_2 g_2 \quad ; \quad f_1/g_1 \sim f_2/g_2$$
>
> $$f \ll g \iff f + g \sim g \quad \text{(d'où } f_1 \ll g_1; \quad f_2 \ll g_2 \Rightarrow \frac{f_1 + g_1}{f_2 + g_2} \sim \frac{g_1}{g_2})$$
>
> $$f_1 \sim f_2 \quad \Rightarrow \quad f_1^\alpha \sim f_2^\alpha \text{ (pour tout } \alpha \in \mathbf{R})$$

(les démonstrations (élémentaires) sont laissées en exercice).

Mais les autres résultats «naturels» sont faux en général; et on se gardera tout particulièrement de croire que $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_1 + g \sim f_2 + g$; ainsi on a $x - x^2 \underset{\infty}{\sim} 1 - x^2$; mais $(x-x^2)+x^2 \underset{\infty}{\not\sim} (1-x^2)+x^2$! Devant une équivalence non dans la liste précédente, il faudra de toute façon démontrer le résultat, et il ne sera le plus souvent vrai que «par hasard».

1.3 La notation de Landau.

Quand on veut remplacer f par une fonction «équivalente», le plus simple est d'écrire $f = f_0 + h$ (où h est l' «erreur» commise), et de préciser $h \ll f$; mais souvent on n'a pas besoin d'expliciter h (on veut juste signaler qu'il y a une correction à effectuer), et on voudrait par contre indiquer clairement la taille de l'erreur. On utilise alors la notation (due à Landau) $h = o(f)$.

L'écriture $g = o(f)$ signifie que $g \ll f$ (pour un comportement de x déjà précisé), et la notation $o\,(f)$ dans une formule représente une fonction **non précisée**, et négligeable par rapport à f. Ainsi, la formule (valable «près de 0») $\sin x = x + o(x^2)$ signifie que la fonction $\sin x - x$ est négligeable par rapport à x^2, c'est-à-dire que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^2} = 0$.

Mais (en violation des règles usuelles !) les différents $o(f)$ figurant dans une même formule ne représentent **pas forcément** la même fonction; ainsi la formule $o(f) + o(f) = o(f)$ signifie seulement que la somme de deux fonctions négligeables par rapport à f est elle-même négligeable par rapport à f !

Aussi, il est vivement recommandé de n'utiliser la notation de Landau que pour abréger l'écriture de l'approximation; pour effectuer des calculs, on s'habituera à remplacer systématiquement $o(f)$ par $f.\varepsilon_i$ (ou par $f(x)\varepsilon_i(x)$), où, par convention, $\lim \varepsilon_i = 0$, et où l'on prend un nouvel i pour chaque approximation...

Landau a introduit par ailleurs une autre notion moins précise, la notion de domination. On dit que f est *dominée* par g au voisinage de $+\infty$, par exemple, si pour x assez grand, f est d'un ordre de grandeur comparable à celui de g, c'est-à-dire, en gros, si g n'est pas négligeble par rapport à f (en $+\infty$). Plus rigoureusement, f est dominée par g, ce que l'on note $f = O(g)$, si $\exists A, x_0, \forall x > x_0, |f(x)| < A|g(x)|$ (A doit évidemment être > 0).

Plus encore que la notation $o(g)$, cette dernière notion doit être manipulée avec beaucoup de prudence. Maple l'utilise, par exemple, pour écrire des formules d'approximations sans prendre trop de risques : on se convaincra qu'écrire $\sin x = x + o(x^2)$ est moins précis que d'écrire $\sin x = x + O(x^3)$ (lui-même moins précis que $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$); toutes ces formules sont néanmioins exactes, comme nous allons bientôt le voir. Une application récente de ces notations vient de l'informatique (théorique) : dans beaucoup de cas, un algorithme est utilisable en pratique si son temps d'exécution est un $O(n^k)$, où n est la taille des données, et k une constante pas trop grande (on dit que c'est un algorithme en temps polynomial), et inutilisable si ce temps est de l'ordre de a^n, même avec a très proche de 1 (on dit que c'est un algorithme exponentiel). On connait pour de nombreux problèmes des algorithmes exponentiels, parfaitement inutilisables (c'est par exemple le cas de la factorisation d'un nombre de n chiffres), et on ignore en général s'il est possible pour les même problèmes de trouver des algorithmes plus efficaces

2 Développements limités.

On appelle développement limité d'une fonction un type d'approximation polynomial valable au voisinage de 0, ou plus généralement de a fini. La définition rigoureuse donnée plus bas (en **2. 3**) se comprend mieux en partant d'une notion un peu plus générale, mais hors-programme : celle de développement asymptotique, qui nécessite elle-même de définir ce qu'on appelle une échelle de comparaison; nous allons commencer par esquisser une définition de ces termes.

2. 1 Échelles de comparaison.

Une échelle de comparaison est une suite de fonctions totalement ordonnée par la relation $\ll$. Ainsi, on a (en $+\infty$) l'échelle des x^n, puisque $1 \underset{\infty}{\ll} x \underset{\infty}{\ll} x^2 \cdots$; et en 0 l'échelle

$$x^n \ll \cdots \ll x^2 \ll x \ll 1 \ll \frac{1}{x} \ll \frac{1}{x^2} \ll \cdots$$

On peut prolonger ces deux échelles : on a vu que pour x tendant vers $+\infty$ on avait par exemple $\ln x \ll x^n \ll 2^x \ll e^x \ll x^x$; et on peut montrer (exercice) que les fonctions $x^\alpha(\ln x)^\beta$ forment une échelle, plus «riche» que les précédentes (on dit qu'on a intercalé des fonctions dans l'échelle des x^α).

Une échelle de comparaison est une base de référence pour les fonctions (plus compliquées) qu'on veut étudier : on essaie de déterminer la position de ces fonctions par rapport aux fonctions de l'échelle.

2.2 Partie principale.

On dit que f a pour partie principale (dans une échelle donnée) la fonction cf_0 (où c est une constante $\neq 0$) si f_0 fait partie de l'échelle, et si $f \sim cf_0$. On voit aisément qu'une fonction donnée ne peut avoir qu'une partie principale (car on ne peut avoir $cf_0 \sim c'f_1$ et $f_0 \ll f_1$; et que $cf_0 \sim df_0 \Rightarrow c = d$) ; mais toutes les fonctions n'en ont pas : ainsi sur l'échelle des x^n, en $(+\infty)$, tout polynôme $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ a pour partie principale $a_n x^n$, mais $\sin x$ et e^x n'ont pas de parties principales sur cette échelle...

On peut «deviner» une partie principale, mais il est plus rigoureux d'étudier la limite «générale» $\lim f/f_i$, où f est la fonction qu'on veut approximer, et où f_i est une fonction «quelconque» de l'échelle; il doit y avoir une seule fonction f_k pour laquelle cette limite vaut c fini et non nul, et la partie principale de f est alors cf_k.

Par définition, si f a pour partie principale cf_0, c'est que $f = cf_0 + o(f_0)$, et on peut appliquer les techniques de calcul vues en **1** ; on voit ainsi que la partie principale d'un produit (ou d'un quotient) est le produit (ou le quotient) des parties principales (du moins si l'échelle est assez riche), et si la somme de deux parties principales **n'est pas nulle**, la partie principale de la somme est celle des deux qui l'emporte sur l'autre; ou la somme des deux si elles sont de même ordre (c'est-à-dire cf_0 et df_0). Mais on ne peut rien dire de précis si les parties principales se sont compensées...

C'est cette technique qui justifie les raisonnements du type «prenons les termes de plus haut degré». En effet, les règles de calcul sur fonctions équivalentes montrent que $f \sim cf_0$ et $g \sim df_1$ entraîne que $\lim f/g = \lim(c/d)(f_0/f_1)$, etc.

2.3 Développements asymptotiques.

Si on a pu trouver la partie principale de f, l'intérêt se concentre sur la mesure précise de l' «erreur» $f - cf_0$; si cette fonction possède elle-même une partie principale $c'f_1$, il est clair que $f_1 \ll f_0$, et que l'on peut écrire $f = cf_0 + c'f_1 + o(f_1)$, écriture qui est plus précise que $f = cf_0 + o(f_0)$. Rien n'empêche de recommencer, et on aboutit à

$$f = c_o f_o + c_1 f_1 + \cdots c_n f_n + o\,(f_n)$$

$$\text{(avec les } f_i \text{ dans l'échelle, et } f_n \ll f_{n-1} \ll \cdots f_1 \ll f_0) \text{ ;}$$

une telle écriture s'appelle un *développement asymptotique* de f sur l'échelle choisie.

À partir de ce point, nous ne considérerons plus que l'échelle des x^n au voisinage de 0 (les autres cas seront étudiés en **5**).

On appelle alors développement limité de f à l'ordre n en 0 (qu'on abrège souvent en $\mathrm{DL}_n(f)$, ou même DL_n) un polynôme $P(x)$ (de degré $\leq n$) tel que (au voisinage de 0) $f(x) - P(x) = o(x^n)$; notant $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, on a $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$, ce qui coïncide bien avec la définition précédente. On écrira donc $\mathrm{DL}_n(f) = P$ (ou, quand on veut attirer l'attention sur la précision exacte : $f(x) = P(x) + o(x^n)$); il est aisé de démontrer que si P existe (pour une certaine valeur de n), P est unique; et que deux DL_m et DL_n de la même fonction coïncident jusqu'au terme de degré $\min(m; n)$.

Toutes les fonctions mêmes «régulières» n'ont pas forcément de DL_n en 0; on étudiera en classe les diverses sources d'exceptions possibles. Mais si une fonction est de classe $\mathcal{C}^n$ près de 0, on verra (en **4**) qu'une des conséquences des formules de Taylor est qu'elle possède un DL_n.

Un développement limité n'est pas exactement une formule d'approximation ; en effet le «reste» (et donc l'erreur commise) est donnée sous forme d'un $o(x^n)$, dont on sait seulement qu'il tend vers 0 (plus vite que x^n) avec x ; mais on ne dispose d'aucune garantie concrète (ainsi par exemple $f(x) = 1+x+10^{15}x\sqrt{|x|}$ admet le DL_1 : $f(x) = 1+x+o(x)$, mais l'erreur ne devient négligeable (inférieure à $x/10$, par exemple) que pour $|x| < 10^{-32}$!). C'est pourquoi nous verrons en **4** des méthodes d'encadrement du reste.

3 Calculs de développements limités.

3.1 DL des fonctions usuelles.

Dans ce paragraphe, on suppose d'abord connus les DL des fonctions élémentaires usuelles, et on va examiner les méthodes de calcul permettant d'en déduire les DL de toutes les fonctions «élémentaires» (c'est-à-dire celles qui sont définies par composition à partir des fonctions usuelles).

On montrera en classe comment obtenir (par calcul de limite) le DL d'une fonction quelconque, mais cette méthode est le plus souvent impraticable, et les DL qui suivent (à l'exception de celui de $1/(1 \pm x)$) ne peuvent être obtenus qu'à l'aide des méthodes de la fin du chapitre.

On déterminera à ce moment en exercice (en général à l'aide de la formule de Taylor) les DL suivants, qu'il faut savoir par cœur :

Développements limités fondamentaux

(en 0)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o(x^n) \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})
\end{aligned}$$

et

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Les autres fonctions usuelles s'en déduisent à l'aide des méthodes du prochain paragraphe ; ainsi, on obtient

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$$

ou encore

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{a^{n+1}} + o(x^n) \quad (\text{si } a \neq 0).$$

Toutefois, même des fonctions simples n'ont pas toujours de DL «réguliers», ainsi, alors que le DL de Arctg s'obtient (par primitive) comme

$$\operatorname{Arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}),$$

et qu'un calcul analogue est possible pour le DL de Arcsin (il sera fait en exercice), il n'y a pas de «formule» simple pour $\tan x$; on pourra retenir (mais est-ce bien indispensable ?)

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$$

3.2 Formules et méthodes de calcul.

De façon générale, la somme de deux DL_n est un DL_n, c'est-à-dire que $\mathrm{DL}_n(f+g) = \mathrm{DL}_n(f) + \mathrm{DL}_n(g)$, ou encore que $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ entraîne que $(f+g)(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$.

Le produit de deux DL_n est un DL_n, à condition de **tronquer** le polynôme produit, c'est-à-dire de ne garder que les termes de degré $\leq n$; et plus généralement on utilisera le fait que $o(x^m)o(x^n) = o(x^{m+n})$ pour ne garder que les termes «significatifs» ; ainsi par exemple

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)(1 - x + x^2 + o(x^2)) = x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} + o(x^3)$$

(une présentation rigoureuse de ce genre de calcul est proposée dans l'exercice-type n° 21).

Le DL d'un quotient (si le dénominateur n'est pas nul en 0) s'obtient en effectuant la division des deux DL «suivant les puissances croissantes», comme on le verra en classe (mais la justification rigoureuse de cette méthode n'est pas au programme).

Si on pose $X = kx^a$ (avec $a > 0$), on a $x \to 0 \iff X \to 0$, et $o(X^n) = o(x^{an})$; ce qui permet d'obtenir des DL (parfois généralisés) par «changement de variable», ainsi on a (pour $x > 0$) $\cos\sqrt{x} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{24} + o(x^2)$.

Mais la «composition» de deux DL (c'est-à-dire le DL_n de $g \circ f$) n'est possible que si $f(0) = 0$; on remplace alors simplement x par le DL_n de f dans le DL_n de g, en tronquant les calculs à l'ordre n.

4 Formules de Taylor.

4.1 Les trois formules de Taylor.

Les formules de Taylor sont des expressions d'approximations polynomiales de «bonnes fonctions» ; les diverses formules expriment le «reste», c'est-à-dire le terme d' «erreur», de plusieurs façons; on verra au chapitre 13 une autre formule analogue (dite «avec reste intégral»).

Leur démonstration est assez technique; le plus simple est de «parachuter» le résultat (qui fut «deviné» historiquement par des manipulations de polynômes), et d'appliquer alors la formule des accroissements finis à une fonction auxiliaire (déduite de $f^{(n)}$); c'est un exercice classique, mais cette méthode est désagréablement artificielle! On montrera au chapitre 13 que la formule avec reste intégral se construit «naturellement» (par récurrence), et comment on peut en déduire les autres.

(Il est aussi possible de les obtenir à partir de la «formule des accroissements finis généralisés» du DM consacré à la règle de l'Hospital, mais cette formule est malheureusement hors-programme!)

Formules de Taylor

Hypothèses (Attention: elles doivent être soigneusement contrôlées)
f est continûment dérivable jusqu'à l'ordre n sur $[a;b]$ (de classe $\mathcal{C}^n$) et admet une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur $]a;b[$

Conclusions (les «formules»)

(1) $(\exists c)(a < c < b)$ tel que
$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

(Taylor-Lagrange)

(2) $$(\exists\theta)(0<\theta<1)f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(b-a))$$

qu'on n'utilise en pratique qu'avec $a = 0$ et $b = x$, d'où

(2') $$(\exists\theta)(0<\theta<1)f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

(Mac-Laurin)

Et (cas particulier), si $f^{(n+1)}$ est bornée au voisinage de 0, on obtient

(3) $$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(x^n)$$

(DL de Young), mais en fait il suffit, pour que ce DL soit valable, que f soit de classe $\mathcal{D}^n$ en 0, et de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ au voisinage de 0...

4.2 Exemples pratiques et estimation du reste.

Les DL des fonctions usuelles (e^x, $\sin x$, $(1+x)^\alpha$ ...) sont des exemples de DL de Young; pour obtenir d'autres exemples «à l'ordre n», il faut disposer d'une formule générale pour $f^{(n)}$ (par exemple la formule de Leibnitz).

Mais on peut souvent obtenir des résultats théoriques d'existence de DL justifiant leur calcul; par exemple, en admettant l'existence d'un DL_n de f^{-1} (où f est une bijection dont on connait le DL_n), il est possible de le calculer par identification en remarquant qu'on doit avoir $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, mais cette méthode manque de rigueur... Toutefois, les fonctions pour lesquelles on utilise cette méthode en pratique sont de classe $\mathcal{C}^n$, et on a vu au précédent chapitre que (**si** $f'(0) \neq 0$), il en est de même de f^{-1}; on peut alors justifier l'existence du DL_n de f^{-1} grâce à la formule de Taylor.

De même, on n'a pas en général le droit de dériver un DL, car il est **faux** d'écrire $(o(x^n))' = o(x^{n-1})$, toutefois la formule de Taylor permet de le faire si f est de classe $\mathcal{C}^n$ (et on peut alors aussi calculer le DL_n d'une primitive de f en prenant une primitive de $\mathrm{DL}_n(f)$, et en n'oubliant pas d'ajuster la constante d'intégration !)

Les applications les plus intéressantes correspondent aux cas où on connait un encadrement de la dérivée $(n+1)$-ème ($f^{(n+1)}$), car on peut alors majorer l'erreur commise. Un exemple célèbre est l'étude de la suite $u_n = 1 + 1 + 1/2 + \cdots + 1/n!$, qui «converge» vers e (cette étude est proposée dans l'exercice-type n° 22); on verra en Spé d'importantes généralisations de cette idée (les «séries entières»).

5 Généralisations et applications.

5.1 Développements asymptotiques en a et à l'infini.

La formule de Taylor-Lagrange, en prenant a fixe et $b = x$ variable, donne un développement analogue au DL de Young, qu'on pourrait d'ailleurs obtenir par la changement de variable $X = x - a$. Ce développement (asymptotique) correspond à une échelle de fonctions, valable «près de a» : l'échelle

$$(x-a)^n \underset{a}{\ll} (x-a)^{n-1} \underset{a}{\ll} \cdots \underset{a}{\ll} (x-a)^2 \underset{a}{\ll} x - a \underset{a}{\ll} 1$$

Plus généralement, il est dommage d'arrêter cette échelle à droite; on a en 0 une échelle plus complète en prenant **tous** les x^α ; on dit alors qu'on fait un développement asymptotique de f en puissances de x (par exemple, on aura (près de 0)

$$\frac{1}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}} = x^{-1/2} - x^{1/2} + x^{3/2} + o(x^{3/2});$$

où l'on remarquera l'ordre des corrections successives).

Quand x tend vers $+\infty$, on peut toujours utiliser l'échelle des puissances de x (les puissances entières suffisent en général), mais en remarquant qu'elle est classée «à l'envers» de celle des développements limités. Ainsi, on écrira par exemple

$$\frac{x^2+1}{x+1} = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + o(1/x^2) \text{ en } +\infty$$

Pour obtenir un tel développement asymptotique, on peut évidemment passer par le changement de variable $X = 1/x$, mais on verra en classe quelques «trucs» plus pratiques. On remarquera la réapparition de l'asymptote $[\![Y = X - 1]\!]$ dans l'exemple précédent; c'est bien sûr la raison du nom du développement.

5.2 Forme du graphe «près de a».

Une application importante de la formule de Taylor consiste à étudier la position du graphe par rapport à sa tangente en a; la mise en équation (le calcul de $\overline{MP}$) montre que la distance entre le graphe et la tangente est donné par le premier terme non nul de degré > 1 (au moins au voisinage du point de contact). On aboutit ainsi (l'étude sera faite en classe) à la règle : si le degré de ce premier terme est 2, on a un point ordinaire, la courbe reste du même côté de la tangente, et la concavité est donnée par le signe de f''; sinon il y a point d'inflexion si ce degré est impair, et «méplat» s'il est pair.

Ces résultats seront généralisés au chapitre 15 à l'étude des courbes paramétriques. Il est toutefois temps de mentionner que certaines fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ peuvent avoir un DL paradoxalement inutilisable, parce qu'entièrement nul; c'est par exemple le cas de $f(x) = e^{-1/x^2}$ (prolongée par $f(0) = 0$) !

5.3 Calculs de limites.

Certaines limites résistent même à la règle de l'Hospital, parce qu'il faudrait dériver plusieurs fois, et que les calculs deviennent vite inextricables : ainsi pour déterminer $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x - \sin x - \operatorname{tg} x + x}{x^5}$ il faudrait dériver 5 fois; une application des DL_5 vus en **4** donne $L = -2/15$. Mais en pratique, il est très rarement nécessaire d'aller si loin : un DL_2 suffit le plus souvent. On a (tout particulièrement en physique) intérêt à bien connaître les plus fréquents ($\sqrt{1+x} \sim 1 + x/2 - x^2/8$; $\ln(1+x) \sim x - x^2/2\ldots$). Il convient enfin de se rappeler que ces DL ne sont valables que pour un comportement de x donné : à l'infini, $x^n \ll e^x$ quel que soit n…

Exercices

1 Fonctions négligeables et équivalentes.

1 ($\star$) A-t-on $f \sim g \Rightarrow e^f \sim e^g$? (Justifier éventuellement votre réponse à l'aide d'un contre-exemple)

2 ($\star\star$) Préciser l'exercice précédent en donnant une condition sur f et g pour que l'implication soit vraie; que pensez-vous de $f \sim g \Rightarrow \ln f \sim \ln g$? Et que se passe-t-il si on remplace $f \sim g$ par $f \ll g$?

3 ($\star$) Pourquoi ne peut-on pas simplement prendre comme définition de «$f = O(g)$» une formule telle que $\lim(f/g) = A$ (avec $A \in \mathbf{R}$) ?

4 ($\star\star$) Montrer que $x^{\alpha_1}(\ln x)^{\beta_1}(\ln\ln x)^{\gamma_1} \underset{+\infty}{\ll} x^{\alpha_2}(\ln x)^{\beta_2}(\ln\ln x)^{\gamma_2} \Rightarrow \alpha_1 < \alpha_2$ ou ($\alpha_1 = \alpha_2$ et $\beta_1 < \beta_2$) ou ($\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, et $\gamma_1 < \gamma_2$). En déduire que les fonctions de la forme $x^\alpha(\ln x)^\beta(\ln\ln x)^\gamma$ forment une échelle de comparaison au voisinage de $+\infty$.

2 Développements limités.

T 21 Déterminer un développement limité à l'ordre 3 (en 0) de la fonction

$$f : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{1+2x}\right).$$

5 ($\star\star$) Déterminer les développements limités suivants (près de 0) :

DL_4 de $\ln \dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$

DL_5 de $\dfrac{\operatorname{Arc}\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$

DL_4 de $e^{\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x}$ et de $e^{x\cos x}$

DL_3 de $(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

6 ($\star\star\star$) Déterminer la partie principale (sur l'échelle des x^n) de $\operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x)$

7 ($\star\star\star$) On suppose qu'au voisinage de 0, on a $f(x) - \sin x \ll x^5$; déterminer le DL_5 d'une fonction g impaire telle que $(*)\ \ (f \circ g)(x) = x + x^5 + o(x^5)$. (Montrer plus précisément que toute fonction g (impaire) ayant le DL que vous aurez obtenu doit vérifier $(*)$)

3 Généralisations et applications.

T 22 Soit $s = (s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que s_n est croissante majorée (on pourra remarquer que $n > 2^n$ pour tout $n \geq 4$). En déduire la convergence de s_n vers une limite que l'on déterminera, en appliquant la formule de Taylor à $x \mapsto e^x$ sur un intervalle bien choisi.

8 ($\star\star$) Déterminer la partie principale (sur l'échelle des x^α en $+\infty$) de la fonction $f\colon x \mapsto f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}$

9 ($\star\star$) Déterminer un développement asymptotique de $\sqrt{x^3+1}$ (au voisinage de $+\infty$) sur l'échelle des x^α, en vous arrêtant au premier terme négligeable par rapport à $1/x$.

10 ($\star\star\star$) Soit P un polynôme de degré 3. Déterminer (en fonction des coefficients de P) la nature des branches infinies de la fonction $P(x)^{\frac{1}{3}}$. Généraliser à $Q(x)^{\frac{1}{\deg(Q)}}$.

11 ($\star\star\star$) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\ln \operatorname{sh} x} - \sqrt[3]{x}; \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x}; \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1^x + 2^x + \cdots + n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

11. TECHNIQUES D'APPROXIMATION

Plan

11. TECHNIQUES D'APPROXIMATION

(Formulaire)

6 Relations et échelles de comparaison.

Définition 6. 1. *On dit que deux fonctions f et g sont* **équivalentes en** a *(a fini ou infini) si on peut écrire $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 1$ (ce qui, en pratique, équivaut le plus souvent à $\lim_a (f/g) = 1$); on note cette relation $f \underset{a}{\sim} g$.*

Définition 6. 2. *On dit que f est* **négligeable** *par rapport à g (en a) si $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ (ce qui équivaut le plus souvent à $\lim_a (f/g) = 0$); on note cette relation $f \underset{a}{\ll} g$.*

Définition 6. 3. *On dit que f est* **dominée** *par g (en a) si $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$, avec ε bornée au voisinage de a, c'est-à-dire qu'il existe une constante A telle que, dans un voisinage de a, $|\varepsilon(x)| < A$.*

Notation de Landau : l'écriture $o(f)$ désigne une fonction (non précisée) négligeable par rapport à f; l'écriture $f = O(g)$ signifie que f est dominée par g.

Ces relations vérifient les règles de calcul suivantes :

$$f \underset{a}{\ll} g \text{ et } g \underset{a}{\ll} h \Rightarrow f \underset{a}{\ll} h$$
$$f \underset{a}{\sim} f \text{ (réflexivité)}, \; f \underset{a}{\sim} g \iff g \underset{a}{\sim} f \text{ (symétrie), et}$$
$$(f \underset{a}{\sim} g \text{ et } g \underset{a}{\sim} h) \Rightarrow f \underset{a}{\sim} h \text{ (transitivité)}$$
$$h \underset{a}{\ll} f \text{ et } f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow h \underset{a}{\ll} g$$
$$f_1 \underset{a}{\sim} f_2; \quad g_1 \underset{a}{\sim} g_2 \qquad \Rightarrow \qquad f_1 g_1 \underset{a}{\sim} f_2 g_2 \quad ; \quad f_1/g_1 \underset{a}{\sim} f_2/g_2$$
$$f \underset{a}{\ll} g \iff f + g \underset{a}{\sim} g \quad (\text{d'o- } f_1 \underset{a}{\ll} g_1; \quad f_2 \underset{a}{\ll} g_2 \Rightarrow \frac{f_1 + g_1}{f_2 + g_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2})$$
$$f_1 \underset{a}{\sim} f_2 \quad \Rightarrow \quad f_1^\alpha \underset{a}{\sim} f_2^\alpha \text{ (pour tout } \alpha \in \mathbf{R})$$

Les relations qui ne figurent pas dans cette liste sont le plus souvent **fausses** !

Définition 6. 4. *On appelle* **échelle de comparaison en** a *une famille de fonctions $(f_i)_{i\in I}$ (avec, le plus souvent, $I = \mathbf{N}$ ou $\mathbf{Z}$) telle que pour tous $i \neq j$, on ait $f_i \underset{a}{\ll} f_j$ ou $f_j \underset{a}{\ll} f_i$.*

On a en particulier les exemples suivants d'échelles :

$$\dots \underset{+\infty}{\ll} \frac{1}{x^2} \underset{+\infty}{\ll} \frac{1}{x} \underset{+\infty}{\ll} 1 \underset{+\infty}{\ll} \ln x \underset{+\infty}{\ll} x \underset{+\infty}{\ll} x^2 \underset{+\infty}{\ll} \dots \underset{+\infty}{\ll} x^n \underset{+\infty}{\ll} \dots \underset{+\infty}{\ll} e^x$$
$$x^n \underset{0}{\ll} x^{n-1} \underset{0}{\ll} \dots \underset{0}{\ll} x^2 \underset{0}{\ll} x \underset{0}{\ll} 1 \underset{0}{\ll} \ln x \underset{0}{\ll} \frac{1}{x}$$
$$(x-a)^n \underset{a}{\ll} (x-a)^{n-1} \underset{a}{\ll} \cdots \underset{a}{\ll} (x-a)^2 \underset{a}{\ll} x - a \underset{a}{\ll} 1$$

Définition 6. 5. *On appelle* **développement asymptotique de** f *selon l'échelle des* (f_i) *une égalité de la forme*

$$f = c_0 f_0 + c_1 f_1 + \cdots c_n f_n + o(f_n)$$

(avec les f_i *dans l'échelle, et* $f_n \ll f_{n-1} \ll \cdots f_1 \ll f_0$*)*

Le terme $c_0 f_0$ *s'appelle la* **partie principale** *de* f.

7 Développements limités.

Définition 7. 1. *On appelle* **développement limité de** f **à l'ordre** n **(en 0)** *(noté* $\mathrm{DL}_n(f)$*) le polynôme unique* $P_n(x)$ *(s'il existe) tel que* $\deg(P_n) \leq n$ *et que* $f - P_n \underset{0}{\ll} x^n$.

Théorème (Taylor, Mac-Laurin). *Si* f *est de classe* $\mathcal{C}^n$ *au voisinage de 0, on a*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x) \qquad (\text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0)$$

(DL de Mac-Laurin, ou de Young).

Développements limités des fonctions usuelles

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x) \\
\frac{1}{a+x} &= \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{a^{n+1}} + x^n\varepsilon(x) \qquad (\text{si } a \neq 0) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + x^n\varepsilon(x) \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

(où les fonctions ε vérifient $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$).

Il n'est pas absolument indispensable de savoir par cœur ceux des autres fonctions usuelles ; voici une liste complémentaire :

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
\operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
&\text{(en utilisant les définitions)} \\
\operatorname{Arc\,tg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
&\text{(comme primitive de } 1/(1+x^2)) \\
\operatorname{Asin} x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots + \frac{(2n)!x^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)(n!)^2} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\
&\text{(comme primitive de } (1-x^2)^{-1/2}) \\
\operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + x^8\varepsilon(x) \\
&\text{(division selon les puissances croissantes)}
\end{aligned}$$

Les formules de Taylor

Théorème (Taylor). *Si f est continûment dérivable jusqu'à l'ordre n sur $[a;b]$ et admet une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur $]a;b[$, on a les «formules» suivantes :*

$$(\exists c)(a<c<b) \text{ tel que } f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \cdots$$

(1) $$\cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

(Taylor-Lagrange)

(2) $$(\exists\theta)(0<\theta<1)\ f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(b-a))$$

qu'on n'utilise en pratique qu'avec $a=0$ et $b=x$, d'où

(2′) $$(\exists\theta)(0<\theta<1) f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

(Mac-Laurin)

* * *

On pensera aussi, dans le cadre des révisions, à leur adjoindre la formule avec reste intégral du chapitre 13 : si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$,

(3) $$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n$$

$$\text{avec } R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

(Taylor, reste intégral)