8. FONCTIONS NUMÉRIQUES

(PROPRIÉTÉS GLOBALES)

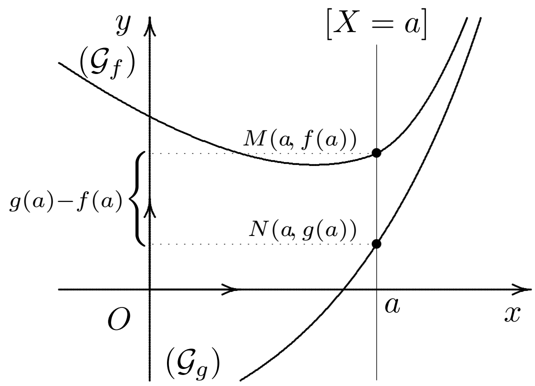
1 Graphes.

1.1 Interprétations graphiques.

Par définition, le graphe de la fonction f est l'ensemble des couples de $\mathbf{R}^2$ (donc du plan) de la forme $(x, f(x))$ pour tous les x de D_f. Si on munit le plan d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, il correspond à chacun de ces couples un point (de coordonnées $\left|\begin{matrix} x \\ f(x)\end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$), et l'ensemble de ces points (appelé, rigoureusement, courbe représentative du graphe de f dans le repère $\mathcal{R}$) sera encore nommé «graphe de f» (mais c'est un abus de langage). Ainsi, «f est une fonction» se traduit par «sur chaque droite $[X = a]$ (sur chaque parallèle à Oy) il y a au plus un point du graphe»; «f est injective» par «sur chaque parallèle à Ox, il y a au plus un point du graphe», etc...; le domaine D_f est la projection du graphe sur Ox et l'image $\mathrm{Im}\,(f)$ est sa projection sur Oy.

Cette représentation de f (dite cartésienne) est loin d'être la seule possible; d'autres types de repères en particulier pourraient être utilisés (on en verra des exemples au chapitre 23), et de nombreuses fonctions nécessitent plusieurs «échelles» différentes pour être complètement visualisées.

1.2 Mise en «équation» du graphe.



Des interprétations plus intéressantes nécessitent une «mise en équation» plus rigoureuse; un exemple typique est la détermination de la position relative de deux graphes (l'un des deux étant fréquemment une droite). Si f et g sont les deux fonctions dont on veut «comparer» les graphes, il est clair que la droite $[X = a]$ coupe les graphes en $M(a, f(a))$ et $N(a, g(a))$ respectivement. $\overline{MN}$ (mesuré sur l'axe Oy) vaut donc $g(a) - f(a)$, et on voit que l'étude du signe de cette quantité donne la position relative de M et N, et donc celle des deux graphes; la distance MN (égale à $|g(a) - f(a)|$) mesurant l'écart entre les deux (mais il ne faut pas oublier que cette mesure est faite parallèlement à Oy; dire que les deux graphes sont «proches» nécessitera un peu plus d'analyse géométrique).

1.3 Graphes «irréguliers».

Il ne faut pas croire que le graphe de toute fonction soit nécessairement formé d'arcs de courbes (régulières); une application telle que

$$f\colon x \mapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

a un graphe «intraçable» (il est formé de points (non reliés) sur l'axe Ox et sur la première bissectrice); et même des fonctions continues peuvent être essentiellement trop irrégulières pour être vraiment dessinées (on réfléchira au chapitre 10 au tracé du graphe de $x \mapsto x \sin 1/x$).

C'est pourquoi les illustrations des paragraphes suivants doivent être interprétées avec prudence; on se gardera en particulier de raisonnements trop intuitifs du genre «on voit sur le graphe que...».

1.4 Calculatrices graphiques.

En particulier, il convient de se méfier des représentations données par les calculatrices graphiques, car elles ne peuvent que calculer un nombre limité de points représentatifs, et se contentent de les relier au mieux ; ainsi, on devra utiliser avec prudence les graphes de fonctions irrégulières (on remarquera par exemple la tendance à lisser les discontinuités d'une fonction telle que $x \mapsto \mathrm{Int}(x)$) ; de fonctions présentant des extremums très rapprochés (on a vu l'importance de «zoomer» sur certains points du graphe de $x \mapsto \sin x + \sin 2x/2 + \sin 3x/3$ au chapitre 5) ; de fonctions variant trop lentement ($x \mapsto \ln\ln(-\ln x)$, près de 0), ou trop vite ($x \mapsto \sin 10^7 x$). Ce dernier exemple mérite d'être étudié en détail ; il fera l'objet d'un exercice en classe.

1.5 Manipulations graphiques, parties positives et négatives.

Partant de la mise en équation, il est souvent possible d'interpréter des constructions graphiques simples. Ainsi, la partie du graphe de f située «au-dessus» de l'axe (Ox) correspond au graphe d'une nouvelle fonction, qu'on appelle la *partie positive* de f, notée souvent f^+, définie par $f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$, et on voit aisément que $f^+(x) = (f(x) + |f(x)|)/2$, ce qu'on note souvent $f^+ = (f + |f|)/2$. Traditionnellement, et par analogie avec les parties réelles et imaginaires d'un complexe, **ce n'est pas ainsi** qu'on définit la *partie négative* de f, notée f^- : on prend comme définition $f^- = (|f| - f)/2$ (et donc $f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$; f^- est toujours positive, et a pour graphe le symétrique de la partie du graphe de f située «en dessous» de l'axe (Ox)). D'autres constructions analogues seront étudiées en classe, par exemple celle du graphe de $h = \sup(f, g)$, définie par $h(x) = \sup(f(x), g(x))$.

2 Symétries.

2.1 Parité.

L'étude du comportement de f quand on change le signe de x (autrement dit l'étude de $f \circ [\![x \mapsto -x]\!]$) s'appelle l'étude de la *parité* de f et s'avère très importante dans de nombreuses applications ; mais nous ne l'utiliserons ici que pour déterminer les symétries éventuelles du graphe par rapport à l'origine et aux axes ; et éventuellement pour simplifier l'étude en limitant le domaine.

On dit donc que f est *paire* (respectivement *impaire*) si pour tout x du domaine de f, on a $f(-x) = f(x)$ (respectivement $f(-x) = -f(x)$). La plupart des fonctions ne sont bien entendu ni paires, ni impaires ; et la définition entraîne qu'il est nécessaire que le domaine soit «symétrique» par rapport à 0, c'est-à-dire que $x \in \mathrm{D}_f \iff -x \in \mathrm{D}_f$. Vérifier qu'une fonction n'est ni paire, ni impaire ne demande qu'un (contre)-exemple, prouver qu'elle est paire nécessite un calcul, comme on l'a dit au chapitre 1.

Il est aisé de montrer que f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à Oy (la mise en équation revient à dire que les deux points $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ sont symétriques si $y' = y$ et $x' = -x$; ce qui en prenant M et M' sur le graphe redonne la formule de parité). De même, f est impaire si le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine.

2.2 Changements de repère et équations de symétrie.

Des symétries plus générales peuvent se ramener aux précédentes par changement de repère; la méthode consiste à déterminer les coordonnées d'un point du graphe dans le nouveau repère, à obtenir une relation fonctionnelle entre ces coordonnées (c'est-à-dire à interpréter le «nouvel Y» en fonction du «nouveau X»), et à étudier la parité de la fonction ainsi obtenue. Ainsi, on pourra utiliser le plan d'étude suivant :

Recherche d'une symétrie (par changement de repère)

1. Établir les formules de changement de repère : le point M, de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, a dans le repère $(C, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les nouvelles coordonnées (X, Y) données par les formules $\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$ (a et b étant les coordonnées de C dans l'ancien repère)

2. Traduire le résultat pour un point du graphe $M(x, f(x))$:

$$M \underset{(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})}{\left|\begin{array}{c} x \\ f(x) \end{array}\right.} = M \underset{(C,\vec{\imath},\vec{\jmath})}{\left|\begin{array}{l} X = x - a \\ Y = f(x) - b \end{array}\right.}$$

3. Exprimer Y en fonction de X : $Y = g(X) = f(X + a) - b$

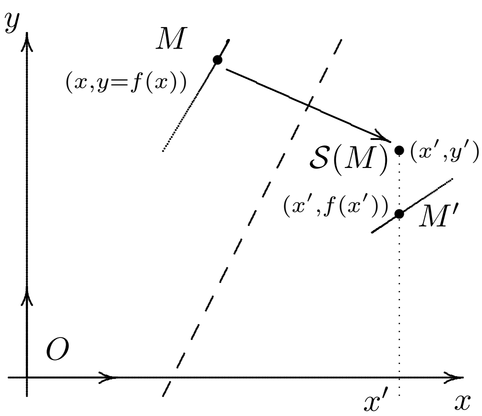
4. Étudier la parité de g, et conclure (par exemple) : g est impaire; son graphe (dans le repère $(C, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$) est symétrique par rapport à l'origine; donc le graphe de f est symétrique par rapport à C

Mais en réalité, cette technique sert surtout à comparer la «forme» de deux graphes, comme on le verra en exercice; pour obtenir une symétrie, il est tout aussi simple d'écrire directement l' «équation de symétrie» que doivent vérifier les points (et donc la fonction), on obtient ainsi :

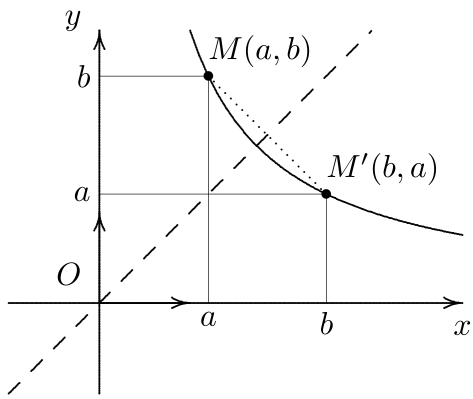
f symétrique par rapport à $[X = a] \iff (\forall x \in \mathrm{D}_f)(f(2a - x) = f(x))$ et

f symétrique par rapport à $C(a; b) \iff (\forall x \in \mathrm{D}_f)(f(2a - x) = 2b - f(x))$.

2.3 Symétries obliques.



La méthode de l'encadré précédent est encore celle que l'on emploie pour prouver qu'un graphe possède une symétrie oblique (étant donné la difficulté des calculs, il est recommandé de ne les engager que si on a de fortes raisons de soupçonner une telle symétrie, ou si l'on est aidé par un logiciel de calcul formel!) : on commence par déterminer, par un raisonnement «géométrique», les coordonnées de l'image d'un point M quelconque par la symétrie envisagée, puis on vérifie que l'image d'un point du graphe appartient encore au graphe; en d'autres termes, notant $\mathcal{S}$ la symétrie, on calcule les coordonnées (x', y') de $\mathcal{S}(M)$, o- M est le point de coordonnées $(x, f(x))$; et on vérifie qu'on a bien $y' = f(x')$. Un exemple (où les calculs ont été confiés à Maple V) est traité dans la fiche d'exercice-type n° 14.



Un cas particulier facile est celui d'une symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice $[Y = X]$ (en repère orthonormé); on voit qu'on a alors $x' = y$ et $y' = x$, et donc que f doit vérifier $f(f(x)) = x$ (pour tout x), ce qui est caractéristique d'une involution (une bijection f telle que $f = f^{-1}$), on retrouve ainsi un résultat du chapitre précédent.

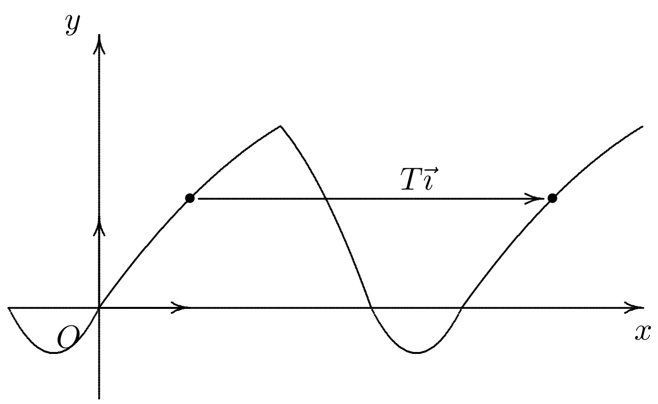
Plus généralement encore, on est parfois amené à se demander si deux graphes sont symétriques l'un de l'autre; avec les notations précédentes, cela revient à chercher si $y' = g(x')$; on prendra garde toutefois à ce que l'image par symétrie d'un graphe n'en est pas forcément un!

Enfin, on pensera à utiliser les propriétés géométriques des symétries, telles que le fait que si on a deux symétries d'axes orthogonaux, on a aussi une symétrie centrale.

3 Périodicité.

3.1 Définitions.

On dit que f est une fonction T-périodique (ou périodique de période T) (avec T constante réelle > 0) si pour tout x de D_f, on a $f(x + T) = f(x)$ (ce qui implique que D_f est aussi périodique). T est une période de f, et on vérifie aisément qu'alors kT est aussi une période pour tout k entier. Si T' est une autre période de f, il en est de même de $kT + k'T'$ (avec k et k' entiers relatifs); un raisonnement soigné (qui sera fait en classe) montre alors que si $T'/T \notin \mathbf{Q}$, il n'y a pas de plus petite période; on verra au prochain chapitre que si f est continue, cela entraîne qu'elle est constante. Ainsi, pour des fonctions périodiques «élémentaires» (donc en général continues) non constantes, il y a une plus petite période, qu'on appelle simplement **la** période de f.



On voit aisément que le graphe d'une fonction T-périodique est invariant par translation de vecteur $T\vec{\imath}$, c'est-à-dire que si M appartient à $\mathcal{G}_f$ et que si $\overrightarrow{MM'} = T\vec{\imath}$, M' appartient aussi à $\mathcal{G}_f$.

3.2 Déterminations pratiques.

Il est aisé en général de déterminer une période (ou de prouver qu'il n'y en a pas); on a vu les cas liés aux fonctions trigonométriques au chapitre 5. Les seules autres fonctions périodiques usuelles sont liées à la fonction «partie entière» (notée en général $x \mapsto E(x)$), définie par : $E(x)$ est le plus grand entier (relatif) $\leq x$ (plus techniquement, on a : $E(x) \in \mathbf{Z} \cap]x-1; x]$, comme on le verra en classe; ce genre d'encadrement fait partie des «trucs» utiles à connaître concernant les fonctions de ce type)

La fonction $x \mapsto x - E(x)$, notée souvent $x \mapsto \mathrm{Frac}(x)$ (la «partie fractionnaire» de x) est 1-périodique (et on peut même la définir comme la fonction 1-périodique qui est égale à $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$ sur l'intervalle $[0; 1[$); l'étude de fonctions faisant intervenir $E(x)$ ou $\mathrm{Frac}(x)$ se fait en général par encadrements et en se restreignant à certains intervalles; on pourra aussi remarquer les propriétés géométriques du graphe de $E(x)$. On peut enfin (mais ce n'est guère qu'une curiosité) obtenir des relations du type

$$\mathrm{Frac}(x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arc\,tg}(\operatorname{tg}(\pi x)) - \frac{1}{2},$$

comme on le verra en exercice. Plus généralement, la fonction $[x \mapsto f(\mathrm{Frac}(x))]$ est 1-périodique et coïncide avec f sur $[0, 1[$; il est possible de construire de même des fonctions périodiques à partir de n'importe quelle période.

La détermination de la période de f est en général impossible d'après la seule définition de f; on devra en général attendre d'avoir étudié les variations pour pouvoir être s-r d'avoir déterminé la plus petite période; toutefois, il est rare qu'une simplification cachée se produise et que la période simple devinée au début ne soit pas la meilleure...

4 Comportements à l'infini.

4.1 Définitions «géométriques».

La notion de base est celle d'*asymptote* : on dit qu'une droite est asymptote à une courbe si, en s'éloignant indéfiniment sur la courbe, on se rapproche de la droite «autant qu'on veut». Une traduction plus rigoureuse est donc (en appelant M un point de la courbe et P le point correspondant de la droite) «$\lim MP = 0$». Toutefois, il faut préciser comment M et P se correspondent (même abscisse, par exemple), et o- au juste est calculée la limite. On reverra ces questions en étudiant les courbes paramétriques (aux chapitres 15 et 23); si on ne s'intéresse qu'à des graphes de fonctions, il n'y a essentiellement que deux cas :

— près d'une «valeur interdite» a (c'est-à-dire que $a \notin \mathrm{D}_f$) : la droite $[X = a]$ est asymptote si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

— à l'infini : la droite $[Y = aX + b]$ est asymptote au graphe de f si l'on a $\lim_{x \to \infty} f(x) - ax - b = 0$ (cette formule correspondant au choix de M et P sur la même «verticale» $[X = x]$, comme on le verra en classe).

4.2 Détermination des asymptotes.

Supposant connus les calculs de limites (les plus simples ont été revus au chapitre 5; des définitions rigoureuses seront donnés au chapitre suivant, et des techniques de calculs adaptées à des cas plus délicats seront vues au chapitre 11), on voit que le seul problème est la détermination de a et b dans le cas d'éventuelles asymptotes «à l'infini». Remarquant que si la limite de $f(x) - ax - b$ est 0, il en est de même de celle de $\dfrac{f(x)}{x} - a$, on en déduit le «plan d'étude» suivant :

Étude des branches infinies

1 Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$ (c réel fini), le graphe admet (en $+\infty$) une asymptote parallèle à Ox («horizontale») d'équation $[Y = c]$;

2 sinon, et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (par exemple), on cherche $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Si cette limite vaut

— 0 : on dit que le graphe présente une branche parabolique d'axe Ox

— $+\infty$: on dit que le graphe présente une branche parabolique d'axe Oy

— $a \neq 0$: on dit que la droite $[Y = aX]$ est direction asymptotique et

3 dans ce cas ($a \neq 0$ fini), on cherche $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax$ et alors :

— Si cette limite existe et vaut b (fini), la droite $[Y = aX+b]$ est asymptote («oblique»)

— Si cette limite est infinie, on dit que le graphe possède une branche parabolique d'axe $[Y = ax]$

Même des fonctions usuelles peuvent ne rentrer dans aucun de ces cas, ainsi la fonction $[x \mapsto x+\cos x]$ admet une direction asymptotique ($a = 1$), mais pas d'asymptote, ni même de branche parabolique, puisque $b = \lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ n'existe pas...

Plus généralement, on dit que les graphes de f et g sont asymptotes (à l'infini) si $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) - f(x) = 0$; cette notion s'utilisant parfois pour préciser la forme d'une branche parabolique; ainsi, on remarquera que ch, sh et $e^x/2$ sont asymptotes en $+\infty$, et donc que le graphe de ch se «redresse» plus vite que celui d'une parabole...

Exercices

1 Représentations graphiques.

1 ($\star$) Étant donné les graphes de f et g, donner une construction des graphes de $|f|$, $x \mapsto \max(f(x), g(x))$, $x \mapsto -f(-x)$. Comment se traduit graphiquement l'affirmation «$|f| \leq |g|$» ?

2 ($\star$) Donner une construction graphique «approximative» des fonctions de la forme $\sin \circ f$ et $x \mapsto f(x) \sin x$, quand f est croissante stricte de 0 à $+\infty$ (par exemple $f : x \mapsto e^x$)

3 ($\star\star$) Donner une construction graphique des fonctions de la forme $f \circ E$, o- $E : x \mapsto E(x)$ est la fonction «partie entière», étant donné le graphe de f.

2 Symétries et changement de repère.

4 ($\star$) Montrer que si le graphe de f possède un centre de symétrie $A(a, b)$, et que $a \in \mathrm{D}_f$, on a $b = f(a)$

5 ($\star\star$) Montrer que toutes les cubiques (les graphes des fonctions de la forme $f : x \mapsto f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$) ont le point $A : (-b/3a; f(-b/3a))$ comme centre de symétrie. (Indication : commencer par effectuer un changement de repère de la forme $X = x + k$ pour se ramener à $y = f(x) = aX^3 + c'X + d'$)

T 14 Soit $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+2}$. Étudier brièvement f, et déduire de cette étude la nature géométrique des éventuelles symétries du graphe. Donner la démarche permettant de prouver en particulier l'existence d'une symétrie oblique, et mettre en œuvre cette démarche à l'aide d'un logiciel approprié (`DERIVE` ou Maple V) ; on recopiera les informations intermédiaires fournies par le programme, et permettant de conclure.

6 ($\star\star\star$) Montrer que les graphes de $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto e^x$ (avec a constante > 1) «ont la même forme», c'est à dire qu'on peut passer de l'un à l'autre par homothétie (ou par changement de repère et d'échelle).

7 ($\star$) Démontrer (avec le moins de calculs possibles) que les graphes de th et de Arctg ne sont pas «semblables» (c'est-à-dire qu'il n'y a aucune homothétie passant de l'un à l'autre) (commencer par remarquer que O est le seul centre d'homothétie possible, puis utiliser la calculatrice !)

3 Branches infinies.

8 ($\star\star$) Faire l'étude des branches infinies de $x \mapsto \ln \operatorname{ch} x$, de $x \mapsto \sqrt{x^2 + \sin x}$

9 ($\star\star\star$) Soit f une fraction rationnelle (un quotient de deux polynômes). Montrer que $f \circ [x \mapsto e^x]$ ne peut avoir (en $+\infty$) qu'une asymptote horizontale ou une branche parabolique d'axe Oy. Que se passe-t-il en $-\infty$? Et pour $\exp \circ f$?

8. FONCTIONS NUMÉRIQUES

Plan

8. FONCTIONS NUMÉRIQUES

PROPRIÉTÉS GLOBALES

(Formulaire)

1 Symétries et périodicité.

Définition 1.1. *f (fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$) est* **paire** *si pour tout $x \in \mathrm{D}_f$, on a $-x \in \mathrm{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$. f est* **impaire** *si pour tout $x \in \mathrm{D}_f$, on a $-x \in \mathrm{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$.*

Les graphes des fonctions paires sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées (Oy), et ceux des fonctions impaires sont symétriques par rapport à l'origine O.

Plus généralement, le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $[\![X = a]\!]$ si pour tout $x \in \mathrm{D}_f$, on a $(2a - x) \in \mathrm{D}_f$ et si $f(2a - x) = f(x)$; de même, le graphe de f est symétrique par rapport au point $C(a; b)$ si pour tout $x \in \mathrm{D}_f$, on a $(2a - x) \in \mathrm{D}_f$ et si $f(2a - x) = 2b - f(x)$.

Si f est bijective, les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice, d'équation $[\![Y = X]\!]$.

Définition 1.2. *Si T est un réel > 0, on dit que f est T-***périodique** *(ou* **périodique de période** *T) si pour tout $x \in \mathrm{D}_f$, on a $(x + T) \in \mathrm{D}_f$, et si on a $f(x + T) = f(x)$. On dit que T est une* **période** *de f. S'il existe une plus petite période $T_0 > 0$, on dit que T_0 est* **la période** *de f.*

Le graphe d'une fonction T-périodique est invariant par translation de vecteur $T\vec{\imath}$.

Définition 1.3. *Le nombre «***partie entière de** *x» (noté $E(x)$) est défini comme le plus grand entier (relatif) inférieur ou égal à x. Autrement dit, $E(x) \in \mathbf{Z}$, $E(x) \leq x$ et $x < E(x)+1$. On appelle* **partie fractionnaire** *de x (noté Frac(x)) le nombre $x - E(x)$.*

La fonction $x \mapsto \mathrm{Frac}(x)$ est 1-périodique.

On retiendra les encadrements

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

$$0 \leq \mathrm{Frac}(x) < 1$$

et la relation

$$E(x + 1) = E(x) + 1.$$

Définition 1.4. *On appelle* **partie positive** *de f, notée f^+, la fonction ayant même domaine que f, définie par $\forall x \in D_f,\ f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$; on appelle de même* **partie négative** *de f, notée f^-, la fonction ayant même domaine que f, définie par $\forall x \in D_f,\ f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}$. On appelle* **valeur absolue** *de f, et on note $|f|$, la fonction définie par $|f|(x) = |f(x)|$.*

On a $f = f^+ - f^-$, $f^+ = (f + |f|)/2$ et $f^- = (|f| - f)/2$.

Définition 1. 5. *On note* $\sup(f,g)$ *la fonction (ayant pour domaine* $D_f \cap D_g$*) définie par* $\sup(f,g)(x) = \sup(f(x), g(x))$*; et de même, on note* $\inf(f,g)$ *la fonction définie par* $\inf(f,g)(x) = \inf(f(x), g(x))$.

On remarquera que $f^+ = \sup(f, \tilde{0})$, et que $f^- = \sup(-f, \tilde{0})$; f^- est donc une fonction à valeurs **positives**.

2 Comportement à l'infini.

Définition 2. 1. *Si* $\lim_a f = \infty$*, on dit que la droite* $[X = a]$ *est* **asymptote** *(***verticale***) au graphe de* f.

Définition 2. 2. *Si* $\lim_\infty (f - g) = 0$*, on dit que les deux graphes de* f *et* g *sont* **asymptotes** *(à l'infini).*

Définition 2. 3. *En particulier, si* $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax - b = 0$*, on dit que la droite d'équation* $[Y = aX + b]$ *est* **asymptote** *(***oblique** *si* $a \neq 0$*,* **horizontale** *si* $a = 0$*) au graphe de* f.

Définition 2. 4. *Si* $\lim_{x\to\infty} f(x)/x = a$*, on dit que la droite d'équation* $[Y = aX]$ *est* **direction asymptotique** *de* f *(en* $+\infty$*). Si alors il n'y a pas d'asymptote, mais que* $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \infty$*, on dit que* f *possède une* **branche parabolique** *d'axe* $[Y = aX]$*. Si enfin* $\lim_{x\to\infty} f(x)/x = \infty$*, on dit que* f *possède une* **branche parabolique** *d'axe* (Oy).

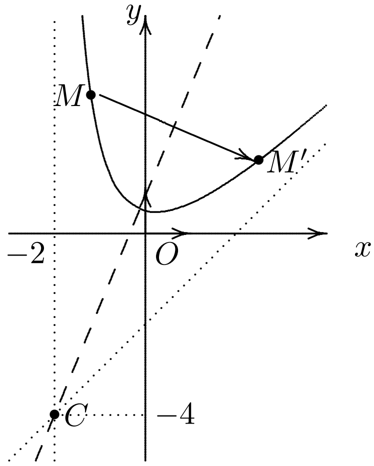
Exercices types : Fiche n° 14

Utilisation d'un logiciel de calcul formel : démonstration de l'existence d'une symétrie oblique

Énoncé.

Soit $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+2}$. Étudier brièvement f, et déduire de cette étude la nature géométrique des éventuelles symétries du graphe. Donner la démarche permettant de prouver en particulier l'existence d'une symétrie oblique, et mettre en œuvre cette démarche à l'aide d'un logiciel approprié (tel que Maple) ; on recopiera les informations intermédiaires fournies par le programme, et permettant de conclure.

Méthode.



1 *L'existence éventuelle de symétries passe par l'établissement soigné du graphe de f (ce que les logiciels envisagés permettent aisément) ; on obtient le graphe reproduit ci-contre (la partie correspondant à $x < -2$ étant symétrique de celle tracée par rapport au point C) ; le raisonnement du chapitre 7 (**2.3**), rappelé ci-dessous et dans le texte de la solution, correspond aux points indiqués sur cette figure.*

2 *C'est les calculs correspondant à ce raisonnement qu'il s'agit de faire exécuter par le logiciel; on doit donc déterminer l'axe de symétrie (la bissectrice des deux asymptotes) et les équations de la symétrie orthogonale, puis choisir un point quelconque $M(x, f(x))$, déterminer les coordonnées du symétrique $\mathcal{S}(M) = M'(x', y')$ en fonction de x, et contrôler enfin que $y' = f(x')$.*

Solution.

f est définie sur $\mathbf{R} - \{-2\}$; de dérivée $f'(x) = (x+2+\sqrt{5})(x+2-\sqrt{5})/(x+2)^2 = (x-x_1)(x-x_2)/(x+2)^2$, d'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		x_1		-2		x_2		$+\infty$
signe de f′		+	0	−	‖	−	0	+	
variations de f	$-\infty$	↗	$-8,4...$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$0,46...$	↗	$+\infty$

(o- les limites sont obtenues de manière évidente en -2 (par étude de signe) et en $\pm\infty$ (comme ci-dessous). L'étude des branches infinies donne d'abord une direction asymptotique $[Y = aX]$, avec $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 1$, puis on obtient $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = -2$; le graphe possède donc une asymptote verticale (d'équation

[$X = -2$]), et une asymptote oblique d'équation [$Y = X - 2$]. On peut donc envisager un centre de symétrie, situé au point d'intersection $C(-2,-4)$ de ces deux droites ; et des axes de symétrie (orthogonale) correspondant aux deux bissectrices de ces deux droites ; ce que le graphe de f semble confirmer. La symétrie centrale serait montrée par changement de repère ($X = x+2$; $Y = y+4$), la nouvelle fonction étant impaire ; nous allons démontrer la symétrie par rapport à la bissectrice de pente positive.

Cherchons d'abord la pente (exacte) de cette droite : elle vaut $\tan 3\pi/8$, que l'on peut retrouver par les techniques du chapitre 3, mais que nos logiciels connaissent (attention toutefois sous Maple : π s'écrit `Pi` et non `pi`) : $\tan(3\pi/8) = 1+\sqrt{2}$. L'équation de la bissectrice Δ est donc $Y = -4 + (1+\sqrt{2})(X+2)$; si $M(x,y)$ a pour symétrique $M'(x',y')$, on doit donc avoir le milieu de MM' sur cette droite, et le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ orthogonal à Δ. Sous Maple V, il suffira (!) d'écrire

```
solset:=solve({(x+xp)/2=X,(y+yp)/2=Y,Y=-4+(1+sqrt(2))*(X+2),
              (x-xp)+(1+sqrt(2))*(y-yp)=0},{xp,yp,X,Y});
```

(rappelons que seul le ; signale la fin d'une instruction) pour que les «formules» donnant x' et y' en fonction de x et y soient déterminées. Pour ne pas avoir à réécrire ces formules, utilisons la commande Maple `assign (solset);`, on vérifiera alors que l'instruction `xp;` renvoie bien $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}(x-y-2+2\sqrt{2})$, par exemple. Supposons alors que M soit sur le graphe, donc que $y = f(x)$; il ne reste plus, pour montrer que M' est aussi sur le graphe, et donc que celui-ci est symétrique, qu'à comparer $f(x')$ et y', ou plut «t à vérifier que l'expression compliquée $y' - f(x')$ se simplifie en 0 (si $x \neq -2$, ce que ces logiciels ne contrôlent pas !). Déclarant alors f par la commande `f:=x->(x*x+1)/(x+2);`, l'instruction `yp-f(xp);` produit une expression» horrible «en x et y ; une substitution (`subs(y=f(x),");`) donne

$$\frac{\left(-2\left(\dfrac{1-x^2}{x+2}\right)+(1+x^2)-\dfrac{(1+x^2)x}{x+2}\right)\sqrt{2}}{-\dfrac{1+x^2}{x+2}-2+x},$$

qu'une dernière simplification (`simplify (");`) montre égal à 0.

Remarques.

1 *La rédaction de l'étude de f a été rendue aussi brève que possible, et les détails des calculs n'ont pas été reproduits; l'énoncé demande d'ailleurs seulement une interprétation des résultats, supposés contrôlés informatiquement.*

2 *Inversement, on n'a pas cherché à optimiser les calculs proposés (ce qui relèverait de la même démarche que de les exécuter à la main); l'avantage des outils informatiques est souvent de pouvoir adopter l'approche la plus directe, là où un long travail de préparation et de simplification s'imposait à l'ère pré-électronique.*

3 *Il est possible, après tout, que ce genre de calcul soit déjà automatisé par* Maple*; mais il n'est pas simple de trouver où, dans l'énorme bibliothèque… Obtenir la performance optimale du logiciel utilisé peut d'ailleurs parfois s'avérer difficile. Ainsi, sous* Maple*, tenter de chercher le signe de f' par une écriture telle que :* `factor (diff (f (x), x), x);`*, qui devrait «marcher», échoue, car les solutions ne sont cherchées que dans* $\mathbf{Q}$*, contrairement à* `solve` *(il faudrait ici une demande plus précise, comme* `a := sqrt (5); factor (diff (f (x), x), x, a);`*), c'est un des nombreux cas où des logiciels tels que* `DERIVE` *sont mieux adaptés…*