4. NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMÉTRIE

1 Introduction.

1.1 Justification historique.

La résolution de l'équation du 3$^{\text{ème}}$ degré (par la méthode de Cardan) amena les mathématiciens italiens du seizième siècle à chercher à donner un sens à des nombres de carré négatif (on verra plus précisément pourquoi en classe). Les nouveaux objets ainsi manipulés au début avec beaucoup de méfiance (sous le nom de nombres «imaginaires», «absurdes», ...) devaient se révéler cohérents, utiles dans de nombreuses applications souvent inattendues, et finalement (au 18$^{\text{ème}}$ siècle) justifiés par une représentation géométrique (le plan complexe) et par des définitions rigoureuses (dont on verra un exemple au chapitre 17).

1.2 Définition de C.

Nous allons ici adopter une approche moins rigoureuse : admettant la cohérence de l'ensemble que nous allons définir, on adjoint simplement à $\mathbf{R}$ un nouvel objet, noté i (il n'est guère noté autrement que par les électriciens), tel, par définition, que $i^2 = -1$ (bien entendu, i ne saurait être réel, et par conséquent n'a pas de «valeur numérique»). Il est alors clair que doivent aussi «exister» tous les objets de la forme $a+bi$, où a et b sont réels; on «démontrera» qu'il n'y a pas besoin de créer d'autres objets que ceux-là. L'ensemble ainsi formé (ou plus précisément cet ensemble et les opérations algébriques qu'on définit sur lui) s'appelle le *corps des nombres complexes* et se note $\mathbf{C}$; si z est un nombre complexe, il est donc de la forme (appelée forme algébrique, ou encore forme cartésienne) $a + bi$; a s'appelle la *partie réelle* de z, et b la *partie imaginaire* de z (on prendra garde à ce que la partie imaginaire de z est donc un nombre réel); on les note respectivement $a = \Re(z)$ (ou $\mathrm{Re}(z)$) et $b = \mathrm{Im}(z)$, d'où la formule : $z = \Re(z)+i.\mathrm{Im}(z)$. Ces deux nombres caractérisent z, c'est-à-dire que deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes parties réelles et imaginaires, principe que nous utiliserons souvent.

1.3 Calculs élémentaires.

L'addition de deux complexes se fait en additionnant séparément leurs parties réelles et imaginaires, ce qui correspond à la formule «évidente» : $(a+bi)+(a'+b'i) = (a+a')+(b+b')i$; la multiplication s'obtient de même, en utilisant la «simplification» $i^2 = -1$: cela conduit à $(a+bi).(a'+b'i) = (aa'-bb')+(ab'+ba')i$. On peut vérifier que ces définitions conduisent aux mêmes formules de calcul que dans $\mathbf{R}$, par exemple $z(z'+z'') = zz'+zz''$. $\mathbf{R}$ est d'ailleurs «contenu» dans $\mathbf{C}$, et on note par exemple $i\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres «imaginaires purs» de la forme $0+bi$.

2 Calculs algébriques.

2.1 Conjugaison et module.

Si $z = a+bi$, le nombre $\bar{z} = a-bi$ s'appelle le *conjugué* de z (on lit «z barre»); il est clair que $\bar{z} = z$ si et seulement si z est réel; et on a les formules :

$$\bar{z} = \Re(z) - i\,\mathrm{Im}(z) \quad ; \quad \Re(z) = (z+\bar{z})/2 \quad ; \quad \mathrm{Im}(z) = i(\bar{z}-z)/2$$

On vérifie par calcul direct les formules de conjugaison :

$$\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'} \quad ; \quad \overline{zz'}=\bar{z}\overline{z'} \quad ; \quad \bar{\bar{z}}=z$$

(on montre qu'en fait ces formules s'étendent à toute expression algébrique) d'où $\overline{z\bar{z}}=\bar{z}\bar{\bar{z}}=z\bar{z}$, ce qui prouve que $z\bar{z}$ est réel. En fait, si $z=a+bi$, on a $z\bar{z}=a^2+b^2$ et $z\bar{z}$ est donc un réel positif. Sa racine carrée s'appelle le *module* de z, qu'on note $|z|$ (à cause des analogies avec la valeur absolue qu'on verra plus loin) ; on a donc $|z|=\sqrt{\Re(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2}$. On peut déjà vérifier que $|zz'|=|z||z'|$.

2.2 Division : le corps des complexes.

A l'aide des formules précédentes, on peut deviner qu'on doit avoir $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{a^2+b^2}$, et le calcul direct montre en effet que $(a+bi)(\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i)=1$.

Il y a donc bien (si a^2+b^2 n'est pas nul, c'est-à-dire si z n'est pas nul) un «inverse» $1/z$ (noté encore z^{-1}) ; on montre alors que les «quatre opérations» $(+,-,\times,\div)$ dans $\mathbf{C}$ ont les mêmes propriétés que dans $\mathbf{R}$, ce qu'on précisera au chapitre 16 ; on dit que $\mathbf{C}$ est un *corps (commutatif)*.

On en déduit en particulier que $zz'=0 \Rightarrow z=0$ ou $z'=0$ (ce qu'on appelle l'intégrité de $\mathbf{C}$) ; cela permet d'utiliser les mêmes méthodes de factorisation que dans $\mathbf{R}$.

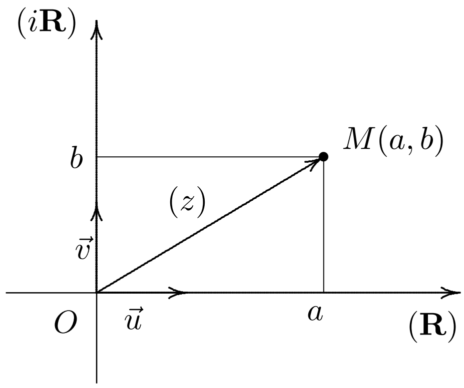
2.3 Équations algébriques.

Ainsi, la résolution d'une équation algébrique dans $\mathbf{C}$ telle que $z^3=1$ passe par la factorisation du polynôme z^3-1 (qui vaut $(z-1)(z^2+z+1)$), puis, comme on vient de le dire, on a $z=1$ ou $z^2+z+1=0$; mais ce genre de méthode ne s'étend pas à des équations contenant des conjugués (ou des modules), il faut en général alors procéder à la séparation des parties réelles et imaginaires.

3 Représentation géométrique.

3.1 Le plan complexe.

Si au complexe $z=a+bi$, on fait correspondre le point du plan de coordonnées $(a;b)$ (dans un repère orthonormal), on réalise une bijection (voir le chapitre 6) de $\mathbf{C}$ vers le plan ; on parle alors du plan complexe, par analogie avec la droite numérique comme représentation de $\mathbf{R}$ (cette représentation est due à Argand, au début du 18ème siècle). On appelle *image* de z le point $(a;b)$, et *affixe* du point $(a;b)$ le complexe z. Plus généralement, on utilisera aussi les termes d'image et d'affixe pour la correspondance qui à z associe le vecteur $(a\vec{u}+b\vec{v})$ du plan vectoriel.

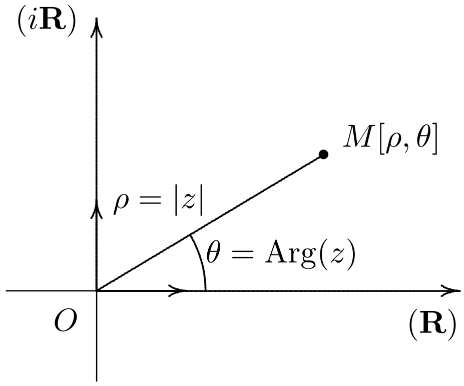


3.2 Traductions géométriques.

L'intérêt de cette représentation est que certains calculs dans **C** ont une interprétation géométrique «naturelle» : ainsi si z et z' ont pour images M et M', $z' - z$ a pour image le vecteur $\overrightarrow{MM'}$; il est souvent possible d'utiliser des résultats géométriques pour en déduire des propriétés de **C**, et c'est cette correspondance qui acheva de rassurer les algébristes quant à l' «existence» de **C**, tandis qu'elle donnait à Gauss l'idée de l'une de ses démonstrations les plus astucieuses du théorème fondamental de l'algèbre, et la première ébauche de ce qui allait devenir (entre les mains de Cauchy) le calcul intégral complexe. Réciproquement, on verra brièvement en **3.4** quelques possibilités de «calculs géométriques», et d'autres applications seront vues au chapitre 22. Le tableau suivant résume les correspondances les plus utiles :

Affixe	**Image**
z, z', ...	M, M', ...
$z + z'$	M'' avec $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$
$(z + z')/2$	Milieu de $[MM']$
$z' - z$	$\overrightarrow{MM'}$
$\bar{z}$	Le symétrique de M par rapport à Ox
$\lvert z\rvert$	La distance OM
az (a réel)	(homothétie de rapport a)
iz	(rotation de $+90°$ autour de O)
	et plus généralement(voir chapitre 22):
$e^{i\theta}z$	(rotation de θ autour de O)

3.3 Module et argument.



Le point M image de z est à distance $|z|$ de l'origine; pour le localiser complètement, il suffit par exemple de connaître l'angle $(\widehat{Ox, OM})$ (il s'agit là de la représentation en «coordonnées polaires», que l'on étudiera au chapitre 23). Cet angle, qui se mesure en radians, est appelé *argument* de z (et noté $\mathrm{Arg}(z)$) ; mais en réalité il n'est défini qu'à 2π près ; on peut utiliser la seule valeur comprise entre 0 et 2π (l'argument *principal*), mais on se contente souvent de dire que l'angle $\mathrm{Arg}(z)$ est un des arguments de z ; ce qui revient à dire que $\mathrm{Arg}(z)$ est un **ensemble** de réels (séparés de 2π) ; cela permet des abus d'écritures du type : $\mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')$)

Cette formule est d'ailleurs difficile à démontrer (il faut passer par l'exponentielle complexe, ou supposer connues les formules de **7.3**), mais elle justifie l'intérêt de la représentation *trigonométrique* : $z = [|z|, \mathrm{Arg}(z)]$ pour tous les calculs n'utilisant que des multiplications et des divisions (et donc aussi des puissances) ; on en verra un exemple en **5**. On retiendra :

$$\mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z') \qquad \mathrm{Arg}(z^n) = n\mathrm{Arg}(z)$$
$$\mathrm{Arg}(z/z') = \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z') \qquad \mathrm{Arg}(\bar{z}) = -\mathrm{Arg}(z)$$

Toutes ces formules sont donc vraies «à 2π près», ce qu'on note souvent $A \equiv B \pmod{2\pi}$, qui se lit «A congru à B modulo 2π», et signifie que $(A - B)/2\pi \in \mathbf{Z}$.

Connaissant la forme trigonométrique de z : $[R, \theta]$, on en déduit la forme algébrique : $z = R\cos\theta + (R\sin\theta)i$ (on peut de même obtenir $\operatorname{Arg}(z)$ connaissant z à l'aide des fonctions Arc tg ou Arc cos du prochain chapitre).

3.4 Applications ; l'inégalité triangulaire.

Certaines propriétés géométriques ont une traduction plus compliquée, mais encore utilisable; ainsi, si trois points A, B et C d'affixes a, b et c sont alignés, c'est que les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, et donc que les affixes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles, soit $(c - a) = k(b - a)$, avec k réel. On en déduit que $(c-a)/(b-a) = (\bar{c}-\bar{a})/(\bar{b}-\bar{a})$. D'autres techniques seront vues au chapitre 22, elles reposent sur le fait que la multiplication par un complexe (de module 1) correspond à une rotation*.

Inversement, une propriété géométrique «évidente» peut permettre une démonstration d'un résultat dans $\mathbf{C}$, ainsi on voit que dans le triangle ABC, l'inégalité $AB \leq AC + CB$ a pour traduction un résultat sur les modules; avec un changement de variable, on obtient l'*inégalité triangulaire* :

$$\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

(le terme de gauche s'obtenant par un autre changement de variable), inégalité qui prolonge celle de la valeur absolue dans $\mathbf{R}$, et qui, comme elle, permet d'obtenir des majorations (voir chapitres 6 et 10); on en déduit comme au chapitre précédent que si $|u| \leq x < 1$ (avec $u \in \mathbf{C}$ et x réel), on a $1 - x \leq |1 + u| \leq 1 + x$.

4 Exponentielle complexe.

4.1 Définition et justification.

Euler, remarquant l'analogie des propriétés de ln avec celles de Arg, et utilisant aussi des formules analogues à celles que nous verrons au chapitre 10 (les DL de sin, cos et exp), a posé par définition :

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

On voit qu'alors la forme trigonométrique s'énonce simplement $[R, \theta] = Re^{i\theta}$. On en déduit (pour conserver les formules élémentaires sur les puissances) la définition :

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$$

que l'on démontrera (en exercice) avoir toutes les propriétés classiques de l'exponentielle. On retiendra de plus que :

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}} \text{ et } e^{-ix} = \overline{e^{ix}} = 1/e^{ix}$$

Toutefois, si on a bien ainsi défini e^z pour tout z, la fonction ainsi obtenue n'est pas bijective, car on vérifiera que $e^a = e^b \iff a = b + 2k\pi i$ (avec k entier relatif); de ce fait, on ne peut généraliser la fonction ln à $\mathbf{C}$.

---

* La multiplication par un complexe quelconque correspond à une similitude directe, mais l'étude de ces transformations est hors-programme.

4. 2 Applications.

En particulier, on obtient ainsi la formule de Moivre : puisque $e^{inx} = (e^{ix})^n$, c'est que

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n.$$

Par développement (et en utilisant la formule du binôme du chapitre 5), on obtient ainsi des expressions de $\cos nx$ et $\sin nx$ comme des polynômes en $\cos x$ et $\sin x$ (qu'on appelle les «polynômes de Tchebychev», et qu'on étudiera au chapitre 5) ; les plus simples seront revus en **7. 4**.

Une autre application importante sera vue dans l'interlude : la résolution des équations différentielles linéaires.

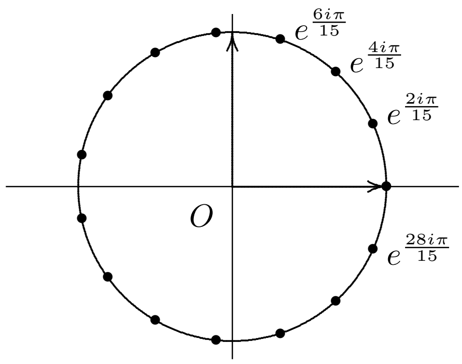
Enfin, un grand nombre de problèmes trigonométriques se simplifient en passant par l'exponentielle : on en verra des exemples en **7. 5** ; on pensera aussi à l'utilisation de cette notation par les physiciens pour les courants alternatifs (et plus généralement pour les phénomènes périodiques).

5 Racines n$^{\text{èmes}}$.

5. 1 Résolution de l'équation $z^n = a$.

Utilisant la forme trigonométrique (ou l'exponentielle complexe), on voit que $z^n = Ae^{i\theta}$ équivaut à $\ln |z| = (\ln A)/n$ et $\text{Arg}(z) = (\theta + 2k\pi)/n$ (avec $k = 0, 1, \ldots n-1$)

Ainsi, tout complexe a (non nul) possède exactement n «racines $n^{\text{èmes}}$» ; on voit que ces racines ont toutes le même module (la racine $n^{\text{ème}}$ de $|a|$) et que leurs arguments sont séparées d'un $n^{\text{ème}}$ de tour (de $2\pi/n$), c'est-à-dire que leurs images sont situées sur le cercle de centre O et de rayon $|a|^{1/n}$, et forment un polygone régulier à n côtés.



Racines 15$^{\text{èmes}}$ de l'unité

5. 2 Racines de l'unité.

Le cas particulier le plus intéressant est $a = 1$; un nombre z tel que $z^n = 1$ s'appelle une *racine ($n^{\text{ème}}$) de l'unité* ; c'est donc un nombre de la forme $e^{2k\pi i/n}$ (avec k et n entiers). Les racines de l'unité ont de nombreuses propriétés algébriques intéressantes ; par exemple, la somme de toutes les racines de l'unité est nulle : on obtient ce résultat en utilisant l'identité remarquable :

$$z^n - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}),$$

souvent connue, sous le nom de *«formule des suites géométriques»*, sous la forme

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n = \begin{cases} \dfrac{z^{n+1} - 1}{z - 1} & \text{si } z \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

qu'on démontrera rigoureusement au chapitre 5.

Les racines de l'unité correspondant à $n = 2$, 3, 4, 5 et 6 seront vues en exercice, car on peut alors exploiter la factorisation algébrique de $z^n - 1$ pour obtenir des valeurs «exactes» des solutions. Ainsi, par exemple, en posant $j = e^{2i\pi/3}$ (une notation presque «officielle»), on obtient $1 + j + j^2 = 0$, qu'on peut résoudre algébriquement, obtenant $\cos(2\pi/3) = -1/2$ et $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

5.3 Racines carrées.

On vient de voir que tout complexe possède deux racines carrées (on vérifie aisément qu'elles sont opposées) ; il est possible de les calculer par une méthode algébrique : en effet, dire que $(x + iy)^2 = a + ib$, c'est résoudre le système (à deux inconnues réelles) :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a \\ xy &= b/2 \end{aligned}$$

(que, par substitution, on ramène à une équation bicarrée en x) ; en pratique, le «truc» consistant à remarquer qu'on doit avoir $|z|^2 = |a + ib|$ permet d'adjoindre au système la troisième équation $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, qui donne (par combinaison) une solution plus rapide ($|x| = \sqrt{(a + \sqrt{a^2 + b^2})/2}$, $|y| = \sqrt{(-a + \sqrt{a^2 + b^2})/2}$; le signe de $xy = b/2$ déterminant ceux de x et y).

Il n'est pas vraiment possible de «privilégier» une des deux solutions ainsi obtenues (les complexes n'ont pas de «signe»), et la notation $\sqrt{a}$ ne signifie donc rien dans $\mathbf{C}$.

6 Équations algébriques.

6.1 Résolution des équations du second degré.

La «mise sous forme canonique» : $az^2+bz+c = a((z+b/2a)^2-(b^2-4ac)/4a^2)$ (où à présent a, b et c sont complexes) est évidemment encore valable dans $\mathbf{C}$; et on voit qu'il s'agit de résoudre une équation de la forme $Z^2 = A$. Il est clair, d'après le paragraphe précédent, qu'on aboutit à ce que toute équation du second degré possède deux racines dans $\mathbf{C}$ (ou une seule, dite double, si le discriminant b^2-4ac est nul), et que ces racines seraient données par les formules «habituelles» si la notation «$\Delta^{1/2}$» était admise ; mais pour les raisons vues plus haut, on doit en fait passer par une rédaction plus lourde : on résout d'abord l'équation $\delta^2 = b^2 - 4ac$; appelant δ_0 l'une des solutions, les deux racines de $az^2 + bz + c$ sont :

$$z_1 = \frac{-b + \delta_0}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b - \delta_0}{2a}.$$

On vérifie aisément que l'on retrouve ainsi la «factorisation canonique» : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$; puis, en redéveloppant, les «relations entre les racines» : $z_1 + z_2 = -b/a$ et $z_1.z_2 = c/a$.

6.2 Équations se ramenant au second degré.

Par changement d'inconnue, on peut ramener au second degré les équations dites bicarrées ($az^4 + bz^2 + c = 0$) et quelques autres types particuliers ; la «méthode de Cardan» permet même de résoudre les équations du troisième degré. Mais en général, on ne sait résoudre que des équations dont on connait une «solution particulière» (une racine évidente) ; on factorise alors, en déterminant le quotient par identification (une technique plus générale sera vue au chapitre 5) ; on peut parfois aussi «deviner» une factorisation, telle $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z^2 + az + 1)(z^2 + bz + 1)$. L'exercice-type n° 3 permettra peut-être de mieux comprendre comment on peut utiliser le cours (supposé maîtrisé !) pour aborder un problème d'un modèle non encore étudié.

6.3 Le théorème fondamental de l'algèbre.

Le succès de toutes ces méthodes a conduit plusieurs mathématiciens, au début du $18^{\text{ème}}$ siècle, à conjecturer le «théorème fondamental de l'algèbre» :

Toute équation algébrique (à coefficients réels ou complexes) possède au moins une solution dans $\mathbf{C}$.

Une amorce de démonstration est due à d'Alembert, mais c'est Gauss qui publia la première preuve rigoureuse; on appelle donc ce théorème (dont un énoncé plus précis sera donné au chapitre 5) le théorème de d'Alembert-Gauss.

Il n'est pas question de donner ici ne serait-ce qu'une indication de démonstration; on remarquera également que le théorème ne donne aucun moyen d'obtenir effectivement une solution (et d'ailleurs, les méthodes pratiques de résolution (approchée) sont en fait très délicates).

On notera cependant par ailleurs que toute équation n'a pas forcément de solution dans $\mathbf{C}$; par exemple $e^z = 0$ est impossible, comme on le voit aisément, et le théorème ne s'applique pas non plus aux équations faisant intervenir la conjugaison, qui ne sont pas algébriques; ainsi, on vérifiera à titre d'exercice que $z(\overline{z}+2)+5=0$ n'a pas de solution.

7 Trigonométrie.

7.1 Formules d'Euler.

Les formules de **2.1** (et le fait que $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$) amènent aux «formules d'Euler» :

$$\cos x = 1/2(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\sin x = 1/2i(e^{ix} - e^{-ix}) = i/2(e^{-ix} - e^{ix})$$

(qu'on a souvent intérêt à manipuler en posant $z = e^{ix}$; puis $\cos x = z/2 + 1/2z$ par exemple).

L'exponentielle complexe étant définie pour tout z, on peut utiliser ces formules pour généraliser cos et sin à $\mathbf{C}$ tout entier; on vérifiera par exemple que $\cos i = 1/2(e+1/e)$. Mais cette généralisation s'avère en pratique sans grand intérêt, bien qu'elle puisse justifier l'introduction des fonctions hyperboliques du prochain chapitre.

7.2 Addition des angles, angles «remarquables».

Il est commode d'utiliser les formules d'Euler pour retrouver les formules d'addition des angles (on le fera en exercice), mais c'est commettre un cercle vicieux (pour s'en convaincre, relire **4.1**). Une véritable justification nécessite le produit scalaire (chapitre 21), mais bien sûr on pourrait prendre les formules d'Euler comme définition de sin et cos, et ne montrer qu'en géométrie que cela correspond à des angles véritables. En tout cas :

$$\cos(x+y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y;$$

et

$$\sin(x+y) = \sin x.\cos y + \sin y.\cos x$$

$$\sin(x-y) = \sin x.\cos y - \sin y.\cos x$$

On en déduit (exercice) que :

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x.\tan y}$$

Prenant des valeurs particulières pour x ou y, on obtient les «formules de symétrie» :

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x \qquad \text{(cos est paire)} \\ \sin(-x) &= -\sin x \qquad \text{(sin est impaire)} \\ \cos(x+\pi) &= -\cos x \\ \sin(x+\pi) &= -\sin x \dots \\ \text{et surtout: } \cos(\pi/2 - x) &= \sin x \qquad \text{(«transformation de sin en cos»)} \end{aligned}$$

(toutefois, ces formules sont en fait «évidentes» si on se reporte à l'interprétation géométrique de sin et cos : il s'agit des symétries du cercle trigonométrique, d'où leur nom).

Les valeurs des fonctions trigonométriques des angles «simples» (essentiellement des multiples de $\pi/6$ et $\pi/4$), qu'on obtient par des considérations de géométrie élémentaire, ou en utilisant les formules d'addition (on verra par exemple en classe comment obtenir $\cos(\pi/12) = (\sqrt{2}+\sqrt{6})/4$) doivent être connues (ou rapidement retrouvées); on retiendra

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\tan\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	"∞"

et l'utilisation des formules de symétrie, en particulier l'importante «astuce»

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

7.3 Duplication, transformation des produits en sommes et des sommes en produits.

Un cas particulier important des formules d'addition est $x = y$; on obtient donc

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2\sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\ (\text{et } \tan 2x &= 2\tan x/(1-\tan^2 x)) \end{aligned}$$

(appelées formules de *duplication*)

Des formules analogues, dites de triplication, peuvent être obtenues par calcul direct ($\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ et $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$); mais le calcul de $\cos nx$ se fait plus aisément par la formule de Moivre quand n est grand (du moins si on accepte de conserver $\cos x$ et $\sin x$...)

En posant $\tan x = a$, la troisième formule devient : $\tan 2x = 2a/(1-a^2)$; en fait, des expressions «rationnelles» analogues existent aussi pour $\cos x$ et $\sin x$, ce sont les «formules en t» : avec $t = \tan(x/2)$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

(on s'en rappelle aisément en réfléchissant aux domaines, et en prenant des cas particuliers tels que $t = 0$)

Leur démonstration sera faite en exercice (elles correspondent à l'intersection du cercle unité avec la droite d'équation $[Y = t(X-1)]$) ; il est important de les connaître, car elles constituent un moyen de se «débarrasser» des expressions en $\sin x$ et $\cos x$ qui marche quand tout le reste a échoué (on en verra un exemple au chapitre 12).

En remarquant la similitude de $\cos(x+y)$ et $\cos(x-y)$, on obtient d'abord $\cos x \cos y = \dfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$ («transformation du produit en somme»), utilisée fréquemment, par exemple, pour des calculs d'intégrales. On peut en en déduire une expression de $\cos p + \cos q$ comme produit (poser $p = (x+y)/2$ et $q = (x-y)/2$) :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

permettant des factorisations éventuelles d'expressions trigonométriques, et il existe des formules analogues pour sin, mais la connaissance de ces résultats («transformation des sommes en produits») n'est plus au programme.

7.4 Résolution d'équations trigonométriques.

Une équation trigonométrique se résoud en général en la ramenant à la forme $\cos A = \cos B$, $\sin A = \sin B$ ou $\tan A = \tan B$; on verra en classe comment y parvenir dans les cas usuels. Une observation des projections vues au chapitre précédent aboutit aux trois «règles» suivantes, qu'il faut bien connaître :

$$\cos A = \cos B \iff A = B + 2k\pi \text{ ou } A = -B + 2k\pi,$$

$$\sin A = \sin B \iff A = B + 2k\pi \text{ ou } A = \pi - B + 2k\pi,$$

$$\tan A = \tan B \iff A = B + k\pi;$$

dans les trois cas, k désigne un entier relatif.

7.5 Utilisation des complexes en trigonométrie.

Les formules d'Euler constituent bien sûr l'outil de base; elles permettent par exemple la *linéarisation*, c'est-à-dire l'expression de puissances de $\cos x$ ou $\sin x$ sous forme de sommes de termes de la forme $\cos kx$. Il suffit en effet de développer

$$(\cos x)^n = \frac{(e^{ix}+e^{-ix})^n}{2^n}$$

(directement, ou par la formule du binôme quand n est grand) et de regrouper ensuite les termes tels que $e^{3ix} + e^{-3ix}$ qui apparaissent, pour ne plus avoir que des termes linéaires; il est recommandé de savoir par cœur $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$ et $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$.

Une autre application importante est la mise de $A\cos x + B\sin x$ sous la forme d'une seule fonction «sinusoïdale» : $K\cos(x+\varphi)$ (les formules de transformations de somme en produit correspondent au cas $A = B$). En développant $Z = (A-iB)e^{ix}$, on voit que $A\cos x + B\sin x = \Re(Z)$, et comme Z a pour module $\sqrt{A^2+B^2}$, on obtient (à π près) $K = \sqrt{A^2+B^2}$; et $\varphi = \operatorname{Arg}(A-iB)(= -\tan^{-1} B/A)$ (ces calculs seront refaits en classe).

Enfin, de nombreuses «sommes trigonométriques» se simplifient par passage aux complexes; le calcul de $S = 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$ est ainsi effectué dans l'exercice-type n° 4. Une importante «astuce» à connaître pour ces simplifications est la formule $1 + e^{i\theta} = 2e^{i\theta/2}\cos(\theta/2)$, obtenue en factorisant $e^{i\theta/2}$ et en reconnaissant la formule d'Euler pour $\cos(\theta/2)$; on se reportera à la fiche n° 4 pour des généralisations éventuelles.

Exercices

1 Calculs algébriques.

1 (R) Calculer $1/i$; $\bar{\imath}$; $1/-i$

2 (R) Résoudre $z^2 = -9$; $z^3 + 4z = 0$

3 ($\star$) Calculer i^{1997}

4 ($\star\star$) Mettre sous forme canonique $\dfrac{(1+i)^5 - 1}{(1-i)^5 - 1}$

2 Représentation géométrique.

5 ($\star$) Déterminer («graphiquement») l'ensemble des images des z tels que $|z-2| > 2$

6 ($\star$) Mettre sous forme trigonométrique $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$

7 ($\star\star$) Mettre sous forme trigonométrique $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$

8 ($\star\star\star$) Mettre sous forme trigonométrique $\dfrac{1+i\tan a}{1-i\tan a}$ et $1+\cos\varphi + i\sin\varphi$ (tenir compte des signes, et penser au besoin à discuter suivant a et φ)

9 ($\star$) Montrer (en utilisant les complexes...) l' «identité de Lagrange» :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

10 ($\star\star\star$) Montrer que $|z| > 2 \Rightarrow |z^2 + z| > 2$

3 Exponentielle complexe.

11 (R) Calculer $e^{i\pi}$; $e^{-i\pi}$; $e^{4i\pi}$; $e^{i\pi/2}$

12 ($\star$) Résoudre (et discuter) l'équation $e^z = a$ (où a est une constante complexe) ; peut-on dire que $z = \ln(a)$?

13 ($\star\star$) Simplifier $\dfrac{e^{it}+1}{e^{it}-1}$ (t réel) ; pouvez vous expliquer simplement le résultat ?

4 Équations algébriques.

14 ($\star$) Déterminer (sous forme algébrique) les racines cubiques (complexes) de -8

15 ($\star\star$) Factoriser (dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{C}$) le polynôme $X^6 - 64$.

16 ($\star\star\star$) Résoudre sous forme algébrique $z^5 + 32 = 0$; représenter les solutions dans le plan complexe

T 3 Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $(z-1)^n = (z+1)^n$ (z inconnue, n entier > 0) ; montrer que toutes les solutions sont imaginaires pures.

17 ($\star$) Résoudre l'équation $(z^2+1)^n = (z+i)^{2n}$

18 ($\star$) Résoudre l'équation $(1-2i)z^2 + (2-3i)z - 13 - 11i$

19 ($\star\star\star$) Résoudre l'équation $z^3 + (2+2i)z^2 + 3iz - 1 + i = 0$ (on cherchera d'abord une racine «évidente»)

20 ($\star\star$) Résoudre l'équation $z^5 + z^4 - 6z^3 - 6z^2 + 25z + 25 = 0$; pouvait-on prévoir à l'avance la nature des solutions ?

TRIGONOMÉTRIE

1 Formules d'addition, duplication, «formules en t».

21 ($\star$) Calculer $\tan 8x$ en fonction de $\tan x$

22 ($\star\star$) Résoudre l'équation $\cos 3x = \cos 2x$, comparer les solutions obtenues par la méthode algébrique et par la méthode directe.

23 ($\star\star$) Montrer que

$$\cos \pi/32 = 1/2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

Déterminer une expression analogue pour $\sin \pi/32$. Généraliser à $\cos(\pi/2^n)$

24 ($\star\star\star$) Déterminer les coordonnées de l'intersection de la droite de pente t (c'est-à-dire parallèle à $[Y = tX]$) passant par $A(-1;0)$ avec le cercle unité.

Expliquer comment on peut ainsi retrouver les «formules en t» ; en déduire l'identité $(2t)^2 + (1-t^2)^2 = (1+t^2)^2$, montrer qu'en prenant t rationnel, on obtient ainsi toutes les solutions entières de $x^2 + y^2 = z^2$

2 Formules d'Euler et applications.

25 ($\star$) Linéariser $\sin^5 x$ et $\cos^2 x \sin^3 x$

26 ($\star$) Posant $t = \tan(x/2)$, calculer $\Re\left(\dfrac{1+it}{1-it}\right)$; retrouver ainsi les «formules en t»

T 4 Mettre sous forme explicite factorisée $S = 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$.

27 ($\star$) Montrer que (pour tout n)

$$\sin(2\pi/n) + \sin(4\pi/n) + \sin(6\pi/n) + \cdots + \sin(2\pi(n-1)/n) = 0$$

4. NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMÉTRIE

Plan