2. RAPPEL DES TECHNIQUES DE CALCUL DANS $\mathbf{R}$

Dans la mesure où les résultats de ce chapitre devraient normalement être bien connus, il n'est rappelé que les formules les plus intéressantes; les justifications seront discutées en classe, d'où le côté schématique de ces quelques pages.

1 Représentation des réels.

1.1 Développements décimaux.

En principe, on peut représenter tout réel par une «suite» telle que $-37,123123\ldots$ (bien que le sens des pointillés soit peut-être à préciser dans chaque cas : de fait, ils supposent qu'on dispose d'une méthode pour calculer les décimales successives); en pratique, écrire $A = 1,234\ldots$ signifie seulement qu'on est sûr que $1,234 < A < 1,235$; la «théorie», délicate, sera esquissée au chapitre 11. On se contentera de remarquer ici que la seule difficulté qui tourmente les néophytes est l'égalité $0,999999... = 1$, qui semble fausse (ou du moins approximative) parce qu'on ne voit pas que dans cette écriture, la suite des 9 est réellement infinie. On se convaincra que si $x = 0,999....$ était strictement inférieur à 1, il serait d'une part difficile de croire que $1 - x = 0,0000...$ soit non nul, d'autre part de savoir comment noter le nombre $(1 + x)/2$; enfin, si ces arguments ne suffisaient pas, on remarquera que l'écriture $1/3 = 0,333...$, en revanche, ne semble pas poser problème. Mais comme on l'a dit, seuls les arguments des chapitres 6 et 11 permettront vraiment de conclure.

1.2 Notation scientifique.

Toutefois, la représentation de nombres très grands ou très petits de manière exacte n'est pas très pratique, et il est plus important de connaître leur ordre de grandeur (techniquement, le «nombre de chiffres» (avant la virgule)), et une valeur approchée (voir plus bas); d'où une notation telle que $A = 6,24\ldots 10^{23}$, que les calculettes noteront `6. 24 E 23`; attention à ne pas confondre `10 E 23`, qui vaut 10^{24}, et `10`x^y`23` (la notation des calculettes pour le calcul de 10^{23}).

1.3 Valeurs approchées.

On dit que a est *valeur approchée* de x à ε près si $|x - a| \leq \varepsilon$, ce qui veut dire qu'on risque de commettre une erreur au plus égale à ε en remplaçant x par a (on utilise le plus souvent pour ε des nombres simples, de la forme $k.10^{-n}$, avec k entier < 10); plus précisément, on parle d'*approximation par excès*, par exemple, si on sait de plus que $a \geq x$. D'un point de vue mathématique, on pourrait penser qu'il s'agit là de notions sans intérêt (puisqu'on essaie en principe d'éliminer les erreurs). Mais outre l'importance considérable de ces notions pour les applications pratiques (où les incertitudes de mesure, par exemple, sont inévitables), on verra à partir du chapitre 8 de nombreuses situations où seule l'utilisation d'approximations bien choisies permet de se ramener à des cas qu'on sait traiter.

Les conventions usuelles de notation des nombres «physiques» reviennent à en donner des valeurs approchées, parfois précises (on utilise alors la convention d'arrondi qui dit que $x = 1,230$ signifie que $1,23$ est une valeur approchée de x à $0,0005$ près, et l'on remarquera que le zéro de droite est significatif dans ce cas) et parfois fort médiocres, telle $H = 73 \pm 4$ km/s/Mpc (il s'agit de la meilleure (!) estimation actuelle de la constante de Hubble).

2 Opérations algébriques.

2.1 Règles élémentaires, quotients.

Les démonstrations des règles de calcul «élémentaires» ne sont pas difficiles, on verra toutefois qu'il est intéressant de les connaître pour pouvoir les généraliser à des situations nouvelles (au calcul matriciel du chapitre 17, par exemple), et on étudiera (au chapitre 18) les techniques de démonstration (abstraites) correspondantes (c'est l'étude de ces questions qui fut jadis appelée l'algèbre «moderne»).

En pratique, les seules règles importantes à retenir sont :

— les règles de «réduction au même dénominateur» :

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{D} = \frac{AD + BC}{CD} \qquad \text{et plus généralement:} \qquad \frac{A}{aC} + \frac{B}{aD} = \frac{AD + BC}{aCD}$$

— l' «inversion» :

$$\frac{1}{(A/B)} = \frac{B}{A};$$

mais c'est surtout parce que ce sont les règles qui provoquent le plus d'erreurs (baptisées «confusions» et «étourderies», alors qu'il ne s'agit que d' «automathismes», venant d'explications insuffisantes, remplacées par l'apprentissage de recettes).

La liste complète des «règles élémentaires» pour $+$ et $\times$ sera donnée au chapitre 18; on montrera alors l'intérêt de cette systématisation.

2.2 Développement et factorisation, identités remarquables.

Il est utile de connaître un procédé systématique (un «algorithme») de développement, on en verra un en classe. Il n'existe malheureusement guère de méthode «universelle» de factorisation (voir toutefois le chapitre 6); d'où l'intérêt de connaître «par cœur» les identités remarquables : ce n'est pas tant pour le gain de temps obtenu dans le développement, mais dans la possibilité de «voir» des factorisations cachées.

Identités remarquables

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

** et rien (dans $\mathbf{R}$) pour factoriser $a^2 + b^2$! **

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 - b^3 \end{aligned}$$

(ces deux identités seront prolongées au chapitre 6: la première est un cas particulier de la "formule du binôme" ($(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \cdots$); la seconde correspond à la "formule des suites géométriques")

2.3 Résolution des équations algébriques.

Résoudre une équation (ou un système d'équations), c'est déterminer l'ensemble (éventuellement vide) des valeurs des variables pour lesquelles l'égalité proposée est vraie (ou pour lesquelles ces égalités sont vraie simultanément). La plupart du temps, on essaie de remplacer les équations initiales par des équations plus simples ayant le même ensemble de solutions, jusqu'à aboutir à des équations qu'on sait résoudre. C'est par exemple ce qui justifie les règles de «passage d'un membre dans l'autre», puisque $A+B=C \iff A+B+(-B)=C+(-B) \iff A=C-B$.

Malheureusement, pour des équations un peu compliquées, on ne peut généralement pas se dispenser d'une analyse logique des opérations effectuées. Ainsi, pour résoudre $\sqrt{2x+3}=x+1$, on est tenté d'élever au carré, obtenant $2x+3=x^2+2x+1 \iff x^2=2$, donc les deux solutions $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, qui sont bien toutes deux dans le domaine de définition de l'équation, puisque $3-2\sqrt{2}>0$. Pourtant, seul $\sqrt{2}$ est solution de l'équation initiale (on dit que $-\sqrt{2}$ est une *solution parasite*) ; on réfléchira utilement à ce qui s'est passé, et pourquoi on est au moins sûr de ne pas avoir perdu de solutions (ce qui serait encore plus gênant).

Il n'est essentiellement pas possible de résoudre une équation algébrique sans factoriser le polynôme correspondant ; on verra aux chapitres 4 et 6 comment y parvenir (en théorie) dans le cas général.

Le cas du second degré amène à chercher une factorisation de ax^2+bx+c, ce qui conduit à la «forme canonique» :

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

puis aux formules bien connues de «calcul des racines» utilisant le discriminant $\Delta = b^2-4ac$. On verra en classe quelles généralisations on peut en faire, et comment ramener d'autres équations à celle-là ; il est essentiel de bien maîtriser les deux méthodes de base : substitution (pour diminuer le nombre d'inconnues) et changement d'inconnue (pour obtenir une équation de forme plus simple).

La méthode de changement d'inconnue, en particulier, oblige à un raisonnement logique qui n'est pas toujours bien compris ; on le rappelera en classe et l'on verra comment le rédiger soigneusement, et comment se prémunir contre le danger de solutions parasites.

3 Puissances.

3.1 Justification des notations.

La définition «élémentaire» de a^n par $a\times a\times\cdots\times a$ (n fois) donne (pour m et n éléments de **N**) la formule bien connue $a^{m+n}=a^m a^n$. Essayant de donner un sens à $n=0$ dans cette formule, on est conduit à $a^m=a^m\times a^0$, d'où (si a n'est pas nul) à $a^0=1$; la même démarche aboutit à la définition classique $a^{-n}=1/a^n$, et même à celle de $a^{1/2}$.

3.2 «Formules».

On obtient (de manière assez longue), la liste des formules classiques (qui sera réétablie dans le cas plus général d'exposants réels au chapitre 4) :

$$a^{m+n} = a^m a^n \; ; \; a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} \; ; \; a^0 = 1 \; ; \; a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

$$(ab)^m = a^m b^m \; ; \; \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \qquad \text{et enfin}$$

$$a^{(mn)} = (a^m)^n$$

(en supposant, évidemment, a et b non nuls)

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que toute autre «formule» (telle que $(a+b)^n = a^n + b^n$) est fausse en général, et devrait de toute façon être démontrée à l'aide des résultats précédents...

4 Relation d'ordre.

4.1 Ordre dans R.

L'ordre dans **R** (ne pas oublier qu'il ne correspond à la «taille» des nombres que pour les réels positifs) vérifie essentiellement les propriétés suivantes :

$a < b$ et $b < c \;\Rightarrow\; a < c$ (transitivité); ($a < b$ et $b < a$) impossible (anticommutativité); $a < b$ ou $b < a$ ou $a = b$ (ordre total); $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ (compatibilité avec l'addition); $0 < a$ et $0 < b \Rightarrow\; 0 < ab$ (multiplication par les nombres positifs).

(On montre que ces propriétés suffisent à retrouver les autres, et en particulier les règles gouvernant le renversement du sens des inégalités quand on les multiplie par un nombre négatif)

Les règles gouvernant les inégalités sont relativement peu intuitives, et il est prudent de s'exercer à démontrer correctement (à ce sujet, l'étude de l'exercice-type n° 1 doit être considérée comme obligatoire); on refera en particulier soigneusement les démonstrations (vues en classe) d'inégalités algébriques, et durant l'année, on pensera à retenir les «astuces» vues au passage (inégalités «de convexité», encadrements, inégalités entre intégrales, etc...).

4.2 Intervalles.

L'autre caractéristique des réels, c'est d'être «complets» pour l'ordre, c'est-à-dire qu'il n'y a aucun «trou» entre réels. Cette question sera détaillée au chapitre 6, où d'importantes notions complémentaires seront exposées; on sait déjà que cela veut dire que les «intervalles» de **R** sont de la forme $[a;b]$ (intervalle fermé), ou $]a;b[$ (intervalle ouvert) ou... (la liste complète sera revue en cours).

Il est commode d'apprendre à décrire des ensembles de réels en termes de réunion d'intervalles; en effet les domaines ainsi décrits correspondent à leur «parcours» par une variable croissante; on verra au chapitre 8 que les principales difficultés d'étude se produisent aux bornes (aux «extrémités») des intervalles ainsi définis.

4.3 Résolution des inéquations.

Les inéquations (c'est-à-dire la recherche des valeurs pour lesquelles une certaine inégalité est vraie) se résolvent par des méthodes analogues à celles vues en **1.2** et **1.3**; toutefois il convient d'être très attentif à la conservation du sens des inégalités dans les transformations successives que subit l'inéquation; les situations difficiles (racines carrées, valeurs absolues, inéquations paramétriques...) se résolvent souvent par la méthode de «séparation des cas», qui amène à son tour à des études de signe; on en verra des exemples en classe.

5 Racines carrées.

5.1 Justification.

L'existence d'un réel x tel que $x^2 = 5$ par exemple n'a rien d'évident; des approches variées y conduisent, mais en définitive, c'est la possibilité de calculer effectivement un nombre tel que $2,236\ldots$ qui la justifie. Par contre, une fois admise l'existence de $\sqrt{a}$ pour tout a positif, il est élémentaire de montrer l'existence de deux racines carrées opposées, et de justifier le choix de la solution positive par la nécessité d'unicité, et une simplification des formules.

5.2 Techniques d'élimination.

Les écritures contenant des radicaux étaient peu commodes, et les calculs numériques correspondants devaient être simplifiés le plus possible (ainsi, il est plus simple de diviser $\sqrt{2}$ $(= 1.4142\ldots)$ par 2 (obtenant «mentalement» $0.7071\ldots$) que de calculer $\sqrt{0.5}$); c'est pourquoi on utilisait des transformations variées, dont la plus intéressante est la «multiplication par la quantité conjuguée», c'est-à-dire l'utilisation de l'identité $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a - b$ (où il ne faut pas oublier de conserver la valeur initiale, par conséquent de multiplier en réalité par $1 = (\sqrt{a}-\sqrt{b})/(\sqrt{a}-\sqrt{b})$). On pourrait penser que ces méthodes sont périmées, mais on les retrouvera à l'œuvre dans des calculs plus théoriques (algèbre, limites, etc...).

6 Valeur absolue.

La notion de valeur absolue s'impose dès que l'on s'intéresse seulement à la «taille» des nombres, par exemple pour des mesures de grandeurs «naturellement» positives (longueurs, aires, ...) ou à des fins de comparaison (ordre de grandeur, etc...). Comme on ne peut «retirer» le signe d'un nombre donné sous forme littérale, on est amené à définir la fonction $|x|$ par intervalles, ou à utiliser des méthodes plus ou moins «bricolées», telle que la formule $|x| = \sqrt{x^2}$.

La manipulation de formules contenant des valeurs absolues est le terrain privilégié de la «séparation des cas», qui se fait en pratique par des représentations en tableaux, contenant le signe des expressions, puis leurs valeurs «sans valeurs absolues» suivant leur signe; on pourra étudier à ce sujet la résolution de l'exercice-type n° 2.

Les situations les plus délicates portent sur les manipulations d'inégalités contenant des valeurs absolues. On pensera d'abord aux interprétations «géométriques» : l'utilisation d' intervalles centrés ($|x-a| < \varepsilon \iff x \in \,]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\,$), l'importante *inégalité triangulaire*

$$\big||a|-|b|\big| \leq |a+b| \leq |a|+|b|,$$

que l'on retrouvera au prochain chapitre, et qu'on verra en exercice pouvoir être mise sous l'utile forme :

$$|u| < k < 1 \Rightarrow 1 - k \leq |1 + u| \leq 1 + k;$$

d'autres cas utilisent des astuces telles que $|A| = |B| \iff A = B$ ou $A = -B$, etc.

Exercices

1 Représentation des réels.

1 (⋆⋆⋆) Déterminer (à l'aide de votre calculatrice, mais en ne vous résignant pas aux messages de dépassement de capacité qu'elle vous affichera...) l'ordre de grandeur (c'est-à-dire l'entier n tel que $10^n < A < 10^{n+1}$) et les quatre premiers chiffres (non nuls) de 2^{10000} ; 2^{-10000} ; $e^{e^{10}}$; $1000! = 1 \times 2 \times \cdots \times 999 \times 1000$.

2 Opérations algébriques.

2 (⋆) Factoriser (dans **R**) $x^4 + 5x^2 - 36$; $x^6 - 1$.

3 (⋆⋆) Factoriser (dans **R**) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ et $x^3 + 2x + 12$.

4 (⋆⋆⋆) Mettez en facteur $x^2 + x + 1$ dans le polynôme $x^5 + 4x^3 + x - 3$.

5 (⋆⋆⋆) Simplifier les expressions rationnelles suivantes (on n'oubliera pas de déterminer les domaines) :

$$\frac{\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y}} \quad ; \quad \cfrac{1}{2x + \cfrac{1}{\cfrac{1}{2} + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{4x+4}}}}$$

3 Relation d'ordre.

T 1 Montrer que pour a et b réels tels que $0 < a < b$, on a l'encadrement

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

6 (⋆⋆) Montrer que si $1 < x < 2$, on a $1 < \sqrt{\dfrac{1+2x}{2+x}} < 1,2$.

7 (⋆⋆) On suppose que $|x| < 1/2$, donner un encadrement de $x + 1 - \sqrt{1 - x^2}$

4 Racines carrées.

8 ($\star\star$) Après avoir précisé les domaines, éliminer les radicaux aux dénominateurs de :

$$\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}-\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \qquad ; \qquad \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$$

9 ($\star\star\star$) Résoudre l'inéquation $\sqrt{x+5} > 2\sqrt{x}-\sqrt{2-x}$

5 Valeur absolue.

T 2 Résoudre (dans $\mathbf{R}$) l'inéquation $|x+1|+1 \geq |x^2-6x|$.

10 ($\star\star$) Résoudre l'inéquation

$$|2x-1| \geq |1+2x-3x^2|$$

11 ($\star\star\star$) Résoudre l'inéquation

$$\big|x-|1-2x|\big| \geq |x+1|+|x^2-1|$$

2. RAPPEL DES TECHNIQUES DE CALCUL DANS $\mathbf{R}$

Plan